前　　言

高等代数是数学专业的一门重要基础课。学生学习这门课程时，往往感到内容抽象，抓不住问题的实质和关键，做题更感困难。编写这本《高等代数方法选讲》的目的，在于帮助学生加深对基本概念和基本理论的理解，牢固掌握所学知识，提高抽象思维能力、逻辑推理能力和解题的技能、技巧。

本书不同于一般的教科书和习题集，编写时以通用的高等代数教科书的内容为基础，由多项式、矩阵和线性空间理论三大部分组成。全书共分八章，每章对基本概念、有关定理等主要内容作了归纳与整理，并配有大量具有代表性的例题与习题。这些例题覆盖面广，有一定难度。例题讲解以剖析解题方法为主，着重揭示概念的内在联系，归纳解题方法和技巧，开拓学生思路，帮助学生解决学习中的困难和问题。习题附有参考答案和提示。

本书中有三节注＊号的内容，由于已超出一般高等代数教科书的范围，为便于自学，特对基本概念与理论的叙述详细一些，与其他章节的写法略有不同。

本书是1988年在贵阳市召开的四川、贵州、云南、海南和广西五省（区）以及重庆市高等师范院校数学系系主任联席会议上决定协作编写的。第一章由和福生执笔（云南师范大学讲师），第二章由唐家祥执笔（云南师范大学副教授），第三章和第四章由钱芳华执笔（广西师范大学副教授），第五章和第六章由王世芳执笔（西南民族学院副教授），第七章由项昭执笔（贵州师范大学讲师），第八章由刘蓉滨执笔（四川省教育学院副教授）。

在完成修改稿后，由副主编王世芳审阅、修改一至三章，副主编薛育海（四川师范学院副教授）审阅、修改四至八章，最后由主编

钱芳华对全书审阅、修改、定稿。

本书由程福长教授(广西师范大学)担任主审,庹世碧副教授(贵州师范大学)担任副主审,唐家祥副教授也参加了审稿工作。他们对本书提出了许多有益的修改意见。

我们还要对有关院、校和数学系的领导、代数教研室的老师的支持和帮助表示感谢。

由于我们的水平有限,不当和错误之处在所难免,请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　多　项　式

§1　一元多项式的概念与运算

基本概念与结论

一、一元多项式的定义

1. 设 n 是一个非负整数，形式表达式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \tag{1}$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是数域 P 中的数，称为**数域 P 上的一元多项式**.

在多项式(1)中，a_0 叫**零次项**或**常数项**，a_1x 叫**一次项**，一般，a_ix^i 叫 i **次项**，a_i 叫 i 次项**系数**.

我们规定：在一个多项式中，可以任意添加或去掉一些系数为零的项；若某个 i 次项($i \neq 0$) 的系数是 1，那么这个系数可以省略不写.

一元多项式常用符号 $f(x)$，$g(x)$，$\cdots$ 来表示.

2. 如果数域 P 上的两个一元多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有完全相同的项或者只相差一些系数为零的项，那么就说 $f(x)$ 与 $g(x)$ **相等**，记作 $f(x) = g(x)$.

3. 数域 P 上的一个系数不全为零的多项式可以唯一地写成

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, a_n \neq 0 \tag{2}$$

a_nx^n 就称为多项式(2) 的**首项**，a_n 称为**首项系数**，非负整数 n 称为多项式(2) 的**次数**.

系数全为零的多项式叫**零多项式**，记作 0，它是唯一不定义次数的多项式.

多项式 $f(x)(f(x)\neq 0)$ 的次数简记为 $\partial(f(x))$.

二、多项式的运算

1. 设 $\quad f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0=\sum_{i=0}^{m}b_iX^i$ 是数域 P 上的两个一元多项式,假定 $m\leqslant n$,则多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$ 是指多项式

$$(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_m+b_m)x^m+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$

即
$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

这里,当 $m<n$,时,取 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积 $f(x)g(x)$ 是指多项式

$$c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

这里,

$$c_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j$$

即
$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n+m}(\sum_{i+j=k}a_ib_j)x_k$$

2. 设 $f(x)$,$g(x)$ 都是数域 P 上的多项式,且 $f(x)\neq 0$,$g(x)\neq 0$,则

(1) 当 $f(x)+g(x)\neq 0$ 时

$$\partial(f(x)+g(x)\leqslant \max(\partial(f(x)),\partial(g(x))$$

(2) $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$

3. 多项式的加法和乘法满足以下运算规则:

(1) 交换律;(2) 结合律;(3) 消去律:设 $f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot h(x)$,若 $f(x)\neq 0$,则 $g(x)=h(x)$;(4) 乘法关于加法的分配律.

4. 所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体,称为数域 P 上的**一元多项式环**,记作 $P[x]$.

5. 带余除法.

设 $f(x),g(x) \in P[x]$,且 $g(x) \neq 0$,则存在唯一的一对多项式 $q(x),r(x) \in P[x]$ 使 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$,其中 $r(x)=0$ 或;$\partial(r(x))<\partial(g(x))$. $q(x),r(x)$ 分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**商式**和**余式**.

应用举例

例 1 证明:多项式

$$f(x)=(x^{50}-x^{49}+\cdots+x^2-x+1)(x^{50}+x^{49}+\cdots+x+1)$$

的展开式中不含奇数次项.

证明 由于

$$x^{51}+1=(x+1)(x^{50}-x^{49}+\cdots+x^2-x+1)$$

$$x^{51}-1=(x-1)(x^{50}+x^{49}+\cdots+x+1)$$

两式相乘得 $x^{102}-1=(x^2-1)f(x)$

而 $x^{102}-1$ 与 x^2-1 都不含奇数次项,故 $f(x)$ 也不含奇数次项.

例 2 设 $f(x)=ah(x)+(x-a)k(x),h(x)\neq 0,k(x)\neq 0$, $g(x)=(x-a)^m h(x),m\geqslant 1,\partial(f(x))<\partial(g(x)),a\neq 0$.

求证:$\partial(k(x))<\partial(h(x))+m-1$ (3)

分析 只需证 $\partial(k(x))+1<\partial(h(x))+m$.

证明 因为 $f(x)-ah(x)=(x-a)k(x)$,所以 $\partial(k(x))+1=\partial(f(x)-a\ h(x))\leqslant \max(\partial(f(x)),\partial(h(x)))$.

又因为 $\partial(f(x))<\partial(g(x))=m+\partial(h(x))$

所以 $\partial(k(x))+1<\partial(h(x))+m$

从而可得 $\partial(k(x))<\partial(h(x))+m-1$

例 3 设 $f(x),g(x)$ 和 $h(x)$ 都是实数域上的多项式,证明:若 $f^{2k}(x)=xg^{2s}(x)+xh^{2t}(x)$,其中 k,s,t 都是自然数,则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

分析 先证一个多项式为零,再证其余两个多项式为零.

证明 首先证明 $f(x)=0$. 如果 $f(x)\neq 0$,因为

$$f^{2k}(x)=xg^{2s}(x)+xh^{2t}(x) \tag{4}$$

所以 $xg^{2s}(x)+xh^{2t}(x)\neq 0$. 从而 $g^{2s}(x)+h^{2t}(x)\neq 0$. 分两种情况讨论:

(1)$g^{2s}(x)\neq 0, h^{2t}(x)\neq 0$. 假定 $f(x), g(x), h(x)$ 的次数分别是 m, n, l. 比较(4)式两边多项式的次数,可得$2km=1+\max(2sn, 2tl)$. 这是不可能的.

(2)$g^{2s}(x)$ 与 $h^{2t}(x)$ 中只有一个不等于零,设 $g^{2s}\neq 0, h^{2t}=0$. 此时有 $2km=1+2sn$. 矛盾.

综上所述,得到 $f(x)=0$.

由 $f(x)=0$ 及(4) 式,得

$$g^{2S}(x)+h^{2t}(x)=0 \tag{5}$$

如果$g(x), h(x)$ 中至少有一个不为0,由于 $g^{2s}(x), h^{2t}(x)$ 的首项系数都是非负实数,且至少有一个是正实数,因此 $g^{2s}(x)+h^{2t}(x)$ 的首项系数不为零,与(5) 式矛盾. 故 $g(x)=h(x)=0$.

例4 试求出所有适合于$f(f(x))=[f(x)]^n$ 的非零复多项式 $f(x)$(n 是正整数).

解 (1) 若 $\partial(f(x))=0$,则 $f(x)=c, c\neq 0$. 由 $f(f(x))=[f(x)]^n$,得$f(f(x))=c^n=c$,于是$c^n=c$. 即$c^{n-1}=1$. 其解为$n-1$ 次单位根

$$c_k=\cos\frac{2k\pi}{n-1}+i\sin\frac{2k\pi}{n-1} \qquad (k=0,1,\cdots,n-2)$$

(2)若$\partial(f(x))\geqslant 1$,设$f(x)$为$m$次多项式,由$f(f(x))=[f(x)]^n$,比较等号两端多项式的次数得

$$mn=m^2$$

从而有

$$m=n$$

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

再把 $f(x)$ 代入 $f(f(x))=[f(x)]^n$ 得

$$(a_0 - 1)[f(x)]^n + a_1[f(x)]^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

逐一从高次到低次考虑首项系数，便得

$$a_0 = 1, a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

所以 $f(x) = x^n$

当 $f(x) = c_k$（c_k 是 $n-1$ 次单位根）或 $f(x) = x^n$ 时，有 $f(f(x)) = [f(x)]^n$. 故满足 $(f(x)) = [f(x)]^n$ 的复多项式是 $f(x) = x^n$ 或 $f(x) = c_k$，其中 $c_k = \cos\frac{2k\pi}{n-1} + i\sin\frac{2k\pi}{n-1}$ $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$.

§2 多项式的整除性

基本概念与结论

一、整除的定义

1. 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，如果存在 $h(x) \in P[x]$ 使 $f(x) = g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记作 $g(x) \mid f(x)$，否则就称 $g(x)$ **不能整除** $f(x)$，记作 $g(x) \nmid f(x)$.

当 $g(x) \mid f(x)$ 时，就称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个**因式**.

2. 任一多项式 $f(x)$ 必整除它自身；任一多项式都整除零多项式；P 中非零常数整除 $P[x]$ 中任一多项式.

3. $P[x]$ 中任一多项式 $f(x)$ 都有因式 $c, cf(x)$（c 是 P 中不为零的数），称它们是 $f(x)$ 的**平凡因式**（或**当然因式**）.

二、整除的基本性质

1. 若 $f(x) \mid g(x)$ 且 $g(x) \mid f(x)$，则 $f(x) = cg(x)$，这里 c 是数域 P 中非零常数.

2. 若 $f(x) \mid g(x), g(x) \mid h(x)$，则 $f(x) \mid h(x)$.

3. 若 $f(x), g_1(x), \cdots, g_m(x)$ 都是 $P[x]$ 中的多项式，且 $f(x) \mid g_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，则对任意的多项式 $u_i(x) \in P[x]$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，

恒有

$$f(x) \mid \sum_{i=1}^{m} u_i(x) g_i(x)$$

三、整除的一个判别法

$f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$,则 $g(x) \mid f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零.

当 $g(x) \mid f(x)$ 时,$g(x)$ 除 $f(x)$ 的商有时也用 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 来表示.

应用举例

例 1 m, p, q 适合什么条件时,有

$$(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q).$$

解法一

$$\begin{array}{r|l} x^3 \qquad\qquad + px \quad + q & x^2 + mx - 1 \\ \cline{2-2} x^3 + mx^2 \quad - x \qquad\quad & x - m = q(x) \\ \hline -mx^2 + (p+1)x + q & \\ -mx^2 - m^2x + m & \\ \hline r(x) = (p + 1 + m^2)x + (q - m) & \end{array}$$

$(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q)$ 必须且只须余式为 0,即

$$(p + 1 + m^2)x + (q - m) = 0$$

所以,当 $\begin{cases} p + 1 + m^2 = 0 \\ q - m = 0 \end{cases}$ 时,有 $(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q)$

解法二 由 $(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q)$,可设

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx - 1)(x + a)$$

即 $x^3 + px + q = x^3 + (m + a)x^2 + (ma - 1)x - a$

比较系数得 $\begin{cases} m + a = 0 \\ ma - 1 = p \\ -a = q \end{cases}$

消去 a 得
$$\begin{cases} p+1+m^2=0 \\ q-m=0 \end{cases}$$

解法一用的是辗转相除法，解法二用的是比较系数法，在讨论含有参数的多项式时，常用这两种方法.

例 2 设 m 是大于 1 的整数，$f(x)=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1$，试求所有满足 $f(x)\mid[f(x^m)+c]$ 的常数 c.

解 当 $c=-m$ 时，

$$\begin{aligned} f(x^m)-m &= x^{m(m-1)}+x^{m(m-2)}+\cdots+x^m+1-m \\ &= (x^{m(m-1)}-1)+(x^{m(m-2)}-1)+\cdots+(x^m-1) \\ &= (x^m-1)q(x) \end{aligned}$$

所以 $(x^m-1)\mid(f(x^m)-m)$. 而 $x^m-1=(x-1)f(x)$，故 $f(x)\mid(x^m-1)$. 从而有 $f(x)\mid[f(x^m)-m]$.

如果常数 c_1 满足 $f(x)\mid[f(x^m)+c_1]$，那么
$$f(x)\mid[f(x^m)-m+(c_1+m)]$$
已证 $f(x)\mid[f(x^m)-m]$，故 $f(x)\mid(c_1+m)$. 而 $f(x)$ 次数大于零，于是 $c_1+m=0$. 即 $c_1=-m$.

所以 $c=-m$ 是满足 $f(x)\mid[f(x^m)+c]$ 的唯一常数.

例 3 设
$$f(x)=(x+1)^{k+n}+(2x)(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n$$
其中 k,n 都是非负整数，证明：$x^{k+1}\mid[(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}]$.

分析 注意到 $f(x)$ 中含有 $x+1$ 及 $2x$，把 $x-1$ 写成 $2x-(x+1)$，这是证明的关键.

证明
$$\begin{aligned} (x-1)f(x) &= [2x-(x+1)][(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k](x+1)^n \\ &= [(2x)^{k+1}-(x+1)^{k+1}](x+1)^n \\ &= (2x)^{k+1}(x+1)^n-(x+1)^{n+k+1} \end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned} (x-1)f(x)+(x+1)^{n+k+1} &= (2x)^{k+1}(x+1)^n \\ &= 2^{k+1}x^{k+1}(x+1)^n. \end{aligned}$$

故 $x^{k+1} \mid [(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}]$.

例 4 证明$(x^d-1)\mid(x^n-1)$的充分必要条件是$d\mid n$,其中d,n是非负整数.

证明 充分性 设$d\mid n$,假定$n=dq$,则

$$\begin{aligned}x^n-1&=x^{dq}-1=(x^d)^q-1\\&=(x^d-1)(x^{d(q-1)}+x^{d(q-2)}+\cdots+x^d+1)\end{aligned}$$

从而$(x^d-1)\mid(x^n-1)$.

必要性 设$(x^d-1)\mid(x^n-1)$,假定$n=dq+r$,$r=0$或$o<r<d$.如果$0<r<d$,那么$x^n-1=x^{dq+r}-1=x^r(x^{dq}-1)+(x^r-1)$.由充分性的证明知$(x^d-1)\mid(x^{dq}-1)$,故$(x^d-1)\mid(x^r-1)$.但是$0<r<d$,矛盾,只有$r=0$.这就证明了$d\mid n$.

§3 最大公因式

基本概念与结论

一、最大公因式的定义及性质

1. 设$f(x),g(x)\in P[x]$.若$d(x)\in P(x)$满足条件:

$$d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$$

则称$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个公因式.

若$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公因式,并且$f(x)$与$g(x)$的任一公因式都是$d(x)$的因式,则称$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个**最大公因式**.

2. 性质

(1) 数域P上任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$的最大公因式一定存在.若$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式,则必有$u(x),v(x)\in P[x]$满足

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x) \tag{6}$$

注意 如果 $f(x),g(x),d(x)\in P[x]$，且有等式 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$ 成立，那么 $d(x)$ 不一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 例如，令 $f(x)=x,g(x)=x+1$，那么以下等式成立：$x(x+2)+(x+1)(x-1)=2x^2+2x-1$，但 $2x^2+2x-1$ 显然不是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式.

如果 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的公因式，又满足等式(6)，那么 $d(x)$ 就是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式.

(2) 若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，则对 P 中任一非零数 c，$cd(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，用记号 $(f(x),g(x))$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式，则 $(f(x),g(x))$ 是唯一的.

(3) 用辗转相除法可求出两个多项式的最大公因式. 最大公因式不因数域 P 的扩大而改变.

二、互素的定义、性质

1. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，若 $(f(x),g(x))=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素(或互质).

2. 互素的性质

(1) 设 $f(x),g(x),h(x)\in P[x]$，若 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，则 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

(2) 设 $f(x),g(x),h(x)\in P[x]$，若 $f(x)|g(x)h(x)$ 且 $(f(x),g(x))=1$，则有 $f(x)|h(x)$.

(3) 设 $f(x),g(x),h(x)\in P[x]$，若 $f(x)|h(x),g(x)|h(x)$ 且 $(f(x),g(x))=1$，则有 $f(x)g(x)|h(x)$.

(4) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，$(f(x),g(x))=1$，当且仅当存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，满足

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

应用举例

一、最大公因式

例 1 设$f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$与$g(x)=x^3+tx^2+u$的最大公因式是一个二次多项式，求t,u的值.

解法一 （辗转相除法）

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
 & x^3+(1+t)x^2+2x+2u & x^3+tx^2+u & \\
q_1(x)=1 & x^3+tx^2+u & x^3+2x^2+ux & q_2(x)= \\
\hline
 & r_1(x)=x^2+2x+u & (t-2)x^2-ux+u & x+(t-2) \\
 & & (t-2)x^2+2(t-2)x+(t-2)u & \\
\cline{3-3}
 & & r_2(x)=-(u+2t-4)x+u(3-t) &
\end{array}
$$

因为最大公因式是二次多项式，必须且只须余式$r_2(x)=0$，

即
$$
\begin{cases} -(u+2t-4)=0 \\ u(3-t)=0 \end{cases}
$$

解得
$$
\begin{cases} u_1=0 \\ t_1=2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} u_2=-2 \\ t_2=3 \end{cases}
$$

解法二 （比较系数法） 设$f(x)=(x^2+ax+b)(x+c)$，$g(x)=(x^2+ax+b)(x+d)$，则有

$$
f(x)(x+d)=g(x)(x+c)
$$

即
$$
x^4+(1+t+d)x^3+[(1+t)d+2]x^2+(2u+2d)x+2ud
$$
$$
=x^4+(t+c)x^3+tcx^2+ux+cu
$$

比较两端系数得

$$
1+d=c,(1+t)d+2=tc,2u+2d=u,2ud=cu
$$

由$u(2d-c)=0$得$u=0$或$c=2d$，分别解得

$$
\begin{cases} u_1=0 \\ t_1=2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} u_2=-2 \\ t_2=3 \end{cases}
$$

例 2 设$f(x),g(x)\in P[x]$，$a,b,c,d\in P$，且$ad-bc\neq 0$，试证：$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x))$.

证明 令 $af(x)+bg(x)=f_1(x)$，$cf(x)+dg(x)=g_1(x)$，$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f_1(x),g_1(x))=d_1(x)$，$(f(x),g(x))=d(x)$. 要证 $d_1(x)=d(x)$. 先证它们相互整除.

因为 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，所以 $d(x)|af(x)+bg(x)$，$d(x)|cf(x)+dg(x)$.

即 $d(x)|f_1(x)$，$d(x)|g_1(x)$. 从而 $d(x)|d_1(x)$.

又因为 $ad-bc\neq 0$，所以

$$f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}g_1(x)$$

$$g(x)=-\frac{c}{ad-bc}f_1(x)+\frac{a}{ad-bc}g_1(x)$$

仿照上面的证明，得 $d_1(x)|d(x)$.

$d_1(x)$ 与 $d(x)$ 相互整除，且首项系数都为 1，所以 $d_1(x)=d(x)$. 即 $(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x))$.

说明 (1) 本例还可以按定义证明 $d(x)$ 是 $af(x)+bg(x)$ 与 $cf(x)+dg(x)$ 的最大公因式.

(2) 当 $a=1,b=0,c=1,d=\pm 1$ 时，则有 $(f(x),g(x))=(f(x),f(x)\pm g(x))$.

例 3 求 $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\frac{x^n}{n!},1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!})$

解 令 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$，$g(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$，则 $f(x)-g(x)=\frac{x^n}{n!}$. 由例 2 知，$(f(x),g(x))=(f(x),f(x)-g(x))=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},\frac{x^n}{n!})$. 显然，$\frac{x^n}{n!}$ 的任何一个次数大于零的因式 $x^i(1\leqslant i\leqslant n)$ 都不是 $f(x)$ 的因式. 所以 $(f(x),f(x)-g(x))=1$. 于是 $(f(x),g(x))=1$.

例 4 证明：

(1) $(f,g)h=(fh,gh)$；

(2) $(f_1,g_1)(f_2,g_2)=(f_1f_2,f_1g_2,g_1f_2,g_1g_2)$.

此处 f,g,h,f_1,f_2,g_1,g_2 等都是 $P[x]$ 中多项式并且 h 的首项系数为 1.

证明 (1) 令 $(f,g)=d$,按定义证明 dh 是 fh 与 gh 的最大公因式. 因为 $d|f,d|g$,所以 $dh|fh,dh|gh$. 即 dh 是 fh 与 gh 的公因式. 设 d_1 是 fh 与 gh 的任一公因式,则 $d_1|fh,d_1|gh$. 又由 $(f,g)=d$ 可知,有 $u,v\in P[x]$,满足 $fu+gv=d$. 从而有 $(fh)u+(gh)v=dh$. 便知 $d_1|dh$. 所以 dh 是 fh 与 gh 的一个最大公因式. 注意到 h 的首项系数为 1,便得 $dh=(fh,gh)$. 即 $(f,g)h=(fh,gh)$.

(2) 由(1)知

$$\begin{aligned}(f_1,g_1)(f_2,g_2)&=(f_1(f_2,g_2),g_1(f_2,g_2))\\&=((f_1f_2,f_1g_2),(g_1f_2,g_2g_2))\\&=(f_1f_2,f_1g_2,g_1f_2,g_1g_2).\end{aligned}$$

例5 设 $f(x),g(x)$ 是 $P[x]$ 中不全为0的多项式,$(f(x),g(x))=1$,求 $\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x)$ 与 $\psi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x)$ 的最大公因式.

解

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=(x-1)[(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)]\\&=(x-1)\varphi_1(x),\end{aligned}$$

$$\psi(x)=(x-1)[(x+1)f(x)+xg(x)]=(x-1)\psi_1(x),$$

由例 4 知,$(\varphi(x),\psi(x))=(x-1)(\varphi_1(x),\psi_1(x))$.

下面求 $(\varphi_1(x),\psi_1(x))$. 设 $(\varphi_1(x),\psi_1(x))=d(x)$,则 $d(x)|[\varphi_1(x)-x\psi_1(x)]$. 即 $d(x)|[f(x)+g(x)]$. 又由 $\psi_1(x)=(x+1)f(x)+xg(x)=x(f(x)+g(x))+f(x)$ 及 $d(x)|\psi_1(x)$,得 $d(x)|f(x)$. 再由 $d(x)|f(x)+g(x)$,得 $d(x)|g(x)$. 而已知 $(f(x),g(x))=1$,故 $d(x)=1$. 所以 $(\varphi(x),\psi(x))=x-1$.

二、互素

例 6 设 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$,证明:

(1) 若对任意多项式 $h(x)$,由 $f(x)|g(x)h(x)$ 可得到 $f(x)|h(x)$,则必有 $(f(x),g(x))=1$;

(2) 若对任意多项式 $h(x)$，由 $f(x)|h(x)$，$g(x)|h(x)$ 可得到 $f(x)$，$g(x)|h(x)$，则必有 $(f(x),g(x))=1$.

证明（用反证法） (1) 若不然，设 $(f(x),g(x))=d(x)$，$\partial(d(x))>0$，且 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，其中 $\partial(f_1(x))<\partial(f(x))$，则 $g(x)f_1(x)=d(x)g_1(x)f_1(x)=f(x)g_1(x)$. 所以 $f(x)|g(x)f_1(x)$. 由题设条件可得到 $f(x)|f_1(x)$. 这与 $\partial(f_1(x))<\partial(f(x))$ 矛盾. 所以 $(f(x),g(x))=1$.

(2) 若不然，设 $(f(x),g(x))=d(x)$，$\partial(d(x))>0$，且 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，其中 $\partial(f_1(x)<\partial(f(x))$，$\partial(g_1(x))<\partial(g(x))$. 和 (1) 的证明类似，有 $f(x)|g(x)f_1(x)$. 显然，$g(x)|g(x)f_1(x)$. 由题设条件可得到 $f(x)g(x)|g(x)f_1(x)$. 这与 $\partial(g(x)f_1(x))<\partial(f(x)g(x))$ 矛盾. 所以 $(f(x),g(x))=1$.

例 7 证明：$(f(x),g(x)h(x))=1$ 的充分必要条件是 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$.

证明 充分性 设 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，则有多项式 $u_1(x)$，$v_1(x)$，$u_2(x)$，$v_2(x)$ 使得

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1$$

$$u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x)=1$$

两式相乘得

$$[u_1(x)u_2(x)f(x)+v_1(x)v_2(x)h(x)+u_2(x)v_1(x)g(x)]f(x)+(v_1(x)v_2(x))g(x)h(x)=1$$

再由多项式互素的充要条件即知

$$(f(x),g(x)h(x))=1$$

必要性 设 $(f(x),g(x)h(x))=1$，则有多项式 $u(x)$，$v(x)$ 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)h(x)=1$$

因此，$(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$.

例 8 证明下列条件等价：

(1) $(f,g)=1$.

(2) $(f^m,g^n+tf^s)=1$.

(3) $(fg,f\pm g)=1$.

其中 f,g 都是 $P[x]$ 中的多项式，m,n,s,t 都是自然数.

证明　先证(1)$\Longleftrightarrow$(2).

设 $(f^m,g^n+tf^s)=1$，则存在多项式 u,v 使得

$$uf^m+v(g^n+tf^s)=1$$

即
$$(uf^{m-1}+vtf^{s-1})f+(vg^{n-1})g=1$$

所以　$(f,g)=1$.

反之，设 $(f,g)=1$，反复应用例 7 的结果得 $(f^s,g^n)=1$.

根据例 2 的结果得　$(f^s,g^n+tf^s)=(f^s,g^n)=1$.

再用例 7 的结果得　$(f^m,g^n+tf^s)=1$.

再证(1)$\Longleftrightarrow$(3).

(1)$\Longrightarrow$(3) 利用例 2，例 7 的结果容易得出.

反之，设 $(fg,f+g)=1$，则存在多项式 u,v 使 $fgu+(f+g)v=1$. 因此有 $f(gu+v)+gv=1$. 从而 $(f,g)=1$.

对 $f-g$ 的情形可同样证明.

例 9　设 $f(x)=x^{2m}+2x^{m+1}-23x^m+x^2-22x+90$，$g(x)=x^m+x-6$，$m$ 是大于 2 的整数，求证 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

证法一　用辗转相除法.

$$\begin{array}{r|l|l}
x^m+x-17 & x^{2m}+2x^{m+1}-23x^m+x^2-22x+90 & x^m+x-6 \\
 & x^{2m}+x^{m+1}-6x^m & \\
\hline
 & x^{m+1}-17x^m+x^2-22x+90 & \\
 & x^{m+1}+x^2-6x & \\
\hline
 & -17x^m-16x+90 & \\
 & -17x^m-17x+102 & \\
\hline
 & x-12 &
\end{array}$$

当 $m>2$ 时，12 不是 x^m+x-6 的根，故由因式定理(§5)知，

$x-12 \nmid x^m+x-6$. 所以$(f(x),g(x))=1$.

证法二 对 $g(x)$ 进行变形.

由 $g^2(x)=x^{2m}+2x^m(x-6)+(x-6)^2$

$$=x^{2m}+2x^{(m+1)}-12x^m+x^2-12x+36$$

得 $$g^2(x)-f(x)=11x^m+10x-54$$

则 $$11g(x)-[g^2(x)-f(x)]=x-12$$

因为 12 不是 $g(x)$ 的根,所以 $x-12$ 与 $g(x)$ 无公共根,从而它们互素,即有

$$(g(x),11g(x)-(g^2(x)-f(x))=1$$

根据例 8 易知 $(g(x),f(x))=1$.

例 10 证明:若 $f(x),g(x)$ 都是数域 P 上次数大于零的多项式,且$(f(x),g(x))=1$,则存在唯一的 $u(x),v(x)\in P[x]$,$\partial(u(x))<\partial(g(x))$,$\partial(v(x))<\partial(f(x))$

满足 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

证 明 因为$(f(x),g(x))=1$,所以存在$u_0(x),v_0(x)\in P[x]$

使得 $$u_0(x)f(x)+v_0(x)g(x)=1 \tag{7}$$

比较左右两端的次数可知,$u_0(x),v_0(x)$ 都不可能是 0,$u_0(x)$ 有下面两种可能.

(Ⅰ) $\partial(u_0(x))<\partial(g(x))$,这时可证

$$\partial(v_0(x))<\partial(f(x))$$

事实上,若 $\partial(v_0(x))\geqslant\partial(f(x))$,则(7) 式左端 $u_0(x)f(x)$ 的次数小于 $v_0(x)g(x)$ 的次数,于是

$$\partial(u_0(x)f(x)+v_0(x)g(x))=\partial(v_0(x)g(x))$$
$$=\partial(v_0(x))+\partial(g(x))>0$$

但(7)式右端的次数是0,这就产生矛盾.所以$\partial(u_0(x))<\partial(g(x))$,$\partial(v_0(x))<\partial(f(x))$.对于这种情况 $u_0(x),v_0(x)$ 即为所求.

(Ⅱ) 若 $\partial(u_0(x))\geqslant\partial(g(x))$,用 $g(x)$ 除 $u_0(x)$ 得 $u_0(x)=q(x)g(x)+r(x)$,其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$.但$r(x)=0$

是不可能的. 因为若 $r(x)=0$,则 $u_0(x)=q(x)g(x)$. 代入(7) 式得 $(q(x)f(x)+v_0(x))g(x)=1$. 故有 $g(x)\mid 1$. 这与 $\partial(g(x))>0$ 的假设矛盾. 故 $r(x)\neq 0$.

将 $u_0(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 代入(7) 式得

$$r(x)f(x)+(q(x)f(x)+v_0(x))g(x)=1$$

令 $u(x)=r(x),v(x)=q(x)f(x)+v_0(x)$,得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1 \tag{8}$$

因为 $\partial(u(x))=\partial(r(x))<\partial(g(x))$,再利用(I)的结果,即证得.

再证唯一性. 假定还有 $u_1(x),v_1(x)\in P[x]$

使得

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1 \tag{9}$$

并且 $\partial(u_1(x))<\partial(g(x)),\partial(v_1(x))<\partial(f(x))$.

由(9) 式减(8) 式得

$$(u_1(x)-u(x))f(x)=(v(x)-v_1(x))g(x)$$

因为 $\quad (f(x),g(x))=1$

所以 $\quad g(x)\mid[u_1(x)-u(x)],f(x)\mid[v(x)-v_1(x)]$

而 $\quad \partial(u_1(x))<\partial(g(x)),\partial(u(x))<\partial(g(x))$

则

$$\partial(u_1(x)-u(x))<\partial(g(x))$$

同样,$\partial(v(x)-v_1(x))<\partial(f(x))$

这是不可能的,所以有 $u_1(x)-u(x)=0,v(x)-v_1(x)=0$,

即 $u_1(x)=u(x),v_1(x)=v(x)$.

例 11 设 $f(x),g(x)$ 不全为 0,求证:

(1) $\left(\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))},\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$

(2) 若 $\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ 与 $\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于零,则存在唯一的一对多项式 $u(x),v(x)$ 满足

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

并且

$$\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)$$

$$\partial(v(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)$$

证明 (1) 由最大公因式性质，存在 $u(x),v(x)$ 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为 0，所以 $(f(x),g(x))\neq 0$. 从而

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1$$

于是 $$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$$

(2) 因为 $\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ 与 $\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于零，由(1)知它们互素. 根据例 10 的结果可知，存在唯一的一对多项式 $u(x),v(x)$ 满足

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1$$

即 $$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

并且 $\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right),\partial(u(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)$.

§ 4 因式分解

基本概念与结论

一、不可约多项式的定义、性质及唯一分解定理

1. 数域 P 上次数大于零的多项式 $p(x)$，如果不能表示成数域 P 上两个次数比它低的多项式的乘积，则称 $p(x)$ 是 P 上的**不可约多项式**. 零多项式与零次多项式，既不能说它们是可约的，也不能说它们是不可约的.

2. 数域 P 上次数大于零的多项式 $p(x)$ 在 P 上不可约的充分必要条件是 $p(x)$ 在 $P[x]$ 中只有平凡因式.

3. 不可约多项式的性质

(1) 若 $p(x)$ 是 P 上的不可约多项式，则 $cp(x)$ 也是 P 上的不可约多项式，其中 c 是 P 中的非零数.

(2) 不可约多项式 $p(x)$ 与任一多项式 $f(x)$ 之间只可能有两种关系，或者 $p(x)\mid f(x)$，或者 $(p(x),f(x))=1$.

(3) 如果 $p(x)$ 在 P 上不可约，且 $p(x)\mid f(x)g(x)$，则 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$.

4. (唯一因式分解定理) 数域 P 上任一次数大于零的多项式都可以分解成 P 上若干个不可约多项式的乘积，在不计常数因子的差别和不可约因式的次序的前提下，分解是唯一的.

5. 数域 P 上任一次数大于零的多项式 $f(x)$ 都有唯一的标准分解式：

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_t^{r_t}(x)$$

这里 $p_i(x)(i=1,\cdots t)$ 是 P 上首项系数为 1 的不可约多项式，且两两互异，c 是 $f(x)$ 的首项系数，$r_i(i=1,\cdots,t)$ 是正整数.

二、重因式

1. 数域 P 上的不可约多项式 $p(x)$ 称为 P 上多项式 $f(x)$ 的 k **重因式**，如果

(1) $p^k(x)\mid f(x)$，(2) $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$.

当 $k=1$ 时，$p(x)$ 称为**单因式**，$k\geqslant 2$ 时，$p(x)$ 称为**重因式**.

2. 设 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的一个 $k(k\geqslant 1)$ 重因式，那么 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的一个 $k-1$ 重因式. 特别地，$f(x)$ 的单因式不是 $f(x)$ 的导数的因式.

3. 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(k\geqslant 1)$ 重因式，那么 $p(x)$ 是 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

4. 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件是 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

5. $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $(f(x),f'(x))=1$.

6. 设 $f(x)$ 的标准分解式为 $ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$，其中

$p_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$是两两不等的首项系数为1的不可约多项式，$r_1,r_2,\cdots r_s$ 是正整数. 当 $f(x)$ 有重因式时，$\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$，即它与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式，这是一个去掉因式重数的有效办法.

三、常见数域上多项式的因式分解

1. 复数域上多项式的因式分解

(1) 复数域 C 上任意一个 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成若干个一次因式的乘积.

(2) 标准分解式：

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\cdots(x-c_s)^{r_s}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots c_s$ 是互异复数，$r_1,\cdots,r_s$ 是正整数.

2. 实数域上多项式的因式分解

(1) 实数域 R 上的任意一个 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成一次因式或二次不可约因式的乘积.

(2) 标准分解式：

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{k_t}$$

其中 $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 是互异实数，$p_1,q_1;p_2,q_2;\cdots;p_t,q_t$ 是互异的实数对，并且满足 $p_i^2<4q_i(i=1,\cdots,t)$，$l_1,\cdots,l_s,k_1,\cdots,k_t$ 都是正整数，并且满足 $\quad l_1+\cdots+l_s+2k_1+\cdots+2k_t=n=\partial(f(x))$

3. 有理数域上多项式的因式分解

(1) 如果一个整系数多项式 $f(x)$ 的系数互素，那么就称 $f(x)$ 是一个**本原多项式**.

(2) 两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式.

(3) 如果一个非零整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

(4)(艾森斯坦因判别法) 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

是一个整系数多项式，如果有一个素数 p 使得

（Ⅰ）$p\nmid a_n$

（Ⅱ）$p\mid a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0$

（Ⅲ）$p^2\nmid a_0$

那么 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

应用举例

一、不可约多项式的判定

例1　设 $p(x)\in P[x]$ 是次数大于零的多项式，如果对任何多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，只要 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 就有 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$，那么 $p(x)$ 是 $P[x]$ 的不可约多项式.

证明　若 $p(x)$ 可约，则 $p(x)=h_1(x)h_2(x)$，且 $\partial(h_1(x))<\partial(p(x))$，$\partial(h_2(x))<\partial(p(x))$. 显然 $p(x)\mid p(x)$，即 $p(x)\mid h_1(x)h_2(x)$. 由题设可得到 $p(x)\mid h_1(x)$ 或 $p(x)\mid h_2(x)$. 无论那种情况都与 $\partial(h_1(x))<\partial(p(x))$，$\partial(h_2(x))<\partial(p(x))$ 矛盾. 所以 $p(x)$ 是 $P[x]$ 的不可约多项式.

例2　证明：有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约当且仅当对任意有理数 $a\neq 0,b$，多项式 $g(x)=f(ax+b)$ 在有理数域上不可约.

证明　必要性　设 $f(x)$ 在有理数域上不可约，但 $g(x)$ 在有理数域上不可约，且设

$$g(x)=f(ax+b)=g_1(x)g_2(x) \tag{10}$$

其中 $g_1(x),g_2(x)$ 是有理系数多项式，且次数小于 $g(x)$ 的次数.

在(10)式中用 $\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ 代 x，所得各多项式系数仍为有理数，次数不变，且有

$$f(x)=g_1\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a})g_2(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right)$$

这说明 $f(x)$ 在有理数域上可约，矛盾. 故 $g(x)$ 在有理数域上

不可约.

充分性　设 $g(x)=f(ax+b)$ 在有理数域上不可约，但 $f(x)$ 可约，且设

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)$$

其中 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 为有理数域上次数小于 $f(x)$ 的次数的多项式. 由此可得

$$f(ax+b)=f_1(ax+b)f_2(ax+b)$$

即

$$g(x)=f_1(ax+b)f_2(ax+b)$$

这与 $g(x)$ 在有理数域上不可约矛盾. 故 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

例 3　证明 x^4+1 在有理数域上不可约.

证法一（反证法）　如果 x^4+1 在有理数域上可约，那么在它的分解式中有以下两种可能情况：(1) 含有一个一次因式，一个三次因式；(2) 含有两个二次因式. 我们要证明无论那种情况都将推出矛盾.

(1) 设 $x^4+1=(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)=x^4+(a+b)x^3+(ab+c)x^2+(ac+d)x+ad$（$a,b,c,d$ 均为有理数），由多项式相等的定义得：$a+b=0$　①，$ab+c=0$　②，$ac+d=0$　③，$ad=1$　④. 由 ① 得 $a=-b$，代入 ② 得 $c=b^2$，再代入 ③ 得 $d=b^3$，再代入 ④ 得 $b^4=-1$. 而 b 是有理数，矛盾.

(2) 设 $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd$（$a,b,c,d$ 均为有理数），由此得：$a+c=0$　⑤，$ac+b+d=0$　⑥，$ad+bc=0$　⑦，$bd=1$　⑧. 由 ⑤ 得 $a=-c$，代入 ⑦ 得 $-c(d-b)=0$　⑨. 如果 $c=0$，代入 ⑥ 得 $b=-d$，再代入 ⑧ 得 $d^2=-1$. 这与 d 是有理数矛盾. 如果 $c\neq 0$，由 ⑨ 得 $b=d$，代入 ⑧ 得 $b^2=1$，所以 $b=\pm 1$，再代入 ⑥ 得 $c^2=\pm 2$. 这与 c 是有理数矛盾.

所以 x^4+1 在有理数域上不可约.

证法二　对 x^4+1 的字母稍加变换，再使用艾森施坦因判别法证明.

令 $x=y+1$，则 $g(y)=f(y+1)=(y+1)^4+1=y^4+4y^3+6y^2+4y+2$.

取 $p=2$，则有 $p\nmid 1, p\mid 4, p\mid 6, p\mid 4, p\mid 2$，但是 $p^2\nmid 2$.

由艾森施坦因判别法知，$g(y)=f(y+1)$ 在有理数域 Q 上不可约.

由例 2，$f(x)$ 在 Q 上不可约.

此例说明，在不能直接使用艾森施坦因判别法时，可将多项式的字母进行变换后再使用，下面再看一个例子.

例 4　证明：当 p 是素数时，$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 在有理数域 Q 上不可约.

证明　注意到 $f(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}$，令 $x=y+1$，$g(y)=f(y+1)=\dfrac{(y+1)^p-1}{y}=y^{p-1}+c_p^1y^{p-2}+\cdots+c_p^{p-1}$，$p\nmid 1$，$p\mid c_p^i(i=1,2,\cdots,p-1)$，且 $p^2\nmid c_p^{p-1}$，由艾森施坦因判别法，$g(y)=f(y+1)$ 在 Q 上不可约. 由例 2，$f(x)$ 在 Q 上不可约.

例 5　设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是整系数多项式，若有素数 p 使得 $p\nmid a_0, p\mid a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_n$，且 $p^2\nmid a_n$，其中 k 是非负整数，求证：在有理数域上 $f(x)$ 有次数 $\geqslant n-k$ 的不可约因式.

证明　由因式分解定理，$f(x)$ 可分解为整系数不可约因式之积，已知 $p\mid a_n$，则在 $f(x)$ 的不可约因式中必有一个因式，设为 $\varphi(x)$，它的常数项能被 p 整除. 记 $\psi(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$，则有 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$.

设
$$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$$
$$\psi(x)=c_0x^k+c_1x^{k-1}+\cdots+c_k$$

并设 b_i 是 $\varphi(x)$ 从最后一项开始第一个不被 p 整除的系数（因 $p\nmid a_0$，故这样的 b_i 是存在的）. 又因为 $a_n=b_mc_k$ 不能被 p^2 整除，所以 c_k 不能被 p 整除. 进而 $a_{k+i}=b_ic_k+b_{i+1}c_{k-1}+\cdots$ 不能被 p 整除，由此有

$h+i\leqslant k$. 故有 $m\geqslant m+h+i-k=n+i-k\geqslant n-k$. 这就证明了 $f(x)$ 有次数 $\geqslant n-k$ 的整系数不可约因式.

值得指出的是，艾森施坦因判别法只给出了整系数多项式在有理数域 Q 上不可约的充分条件，而不是必要条件. 对另一类有理系数多项式的可约性问题，可用 §5 有关根的知识来讨论. 看以下各例.

例 6 设 $f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)-1$，其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是两两不同的整数. 证明：$f(x)$ 在有理数域上不可约.

证明 若 $f(x)$ 在有理数域上可约，则 $f(x)$ 可以分解成两个次数较低的整系数多项式之积，即 $f(x)=g(x)h(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 是整系数多项式，且 $\partial(g(x))<n$，$\partial(h(x))<n$. 由题设可得

$$f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=-1(i=1,2,\cdots,n)$$

则有 $g(a_i)=1,h(a_i)=-1$ 或 $g(a_i)=-1,h(a_i)=1$. 从而总有 $g(a_i)+h(a_i)=0(i=1,2,\cdots,n)$. 可见多项式 $g(x)+h(x)$ 有 n 个互异根. 但

$$\partial(g(x)+h(x))<n$$

这与多项式在任一数域中的根的个数不超过多项式的次数的性质相矛盾. 所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

注意 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两互异这一条件是不可少的，否则命题不成立. 例如 $f(x)=(x-a)^2-1=(x-a-1)(x-a+1)$，$f(x)$ 在有理数域上可约.

例 7 设整系数多项式 $f(x)$ 对 x 取无限个整数时的函数值都是素数，证明：$f(x)$ 在有理数域上不可约.

证明 设 $f(x)$ 在有理数域上可约，则有

$$f(x)=g(x)h(x)$$

其中 $g(x)$，$h(x)$ 为次数较 $f(x)$ 次数低的整系数多项式. 假定 $x=a$ 时，$f(a)=p$ 是素数，则 $g(a)$，$h(a)$ 中必有一个的值是 ± 1. 于是当 x 取遍整数集时，$g(x)$ 或 $h(x)$ 中至少有一个的函数值应无限次取 1 或 -1. 即 $\quad g(x)-1,g(x)+1,h(x)+1,h(x)-1$

四个多项式中至少有一个具有无限个根. 矛盾. 所以, $f(x)$ 在有理数域上不可约.

例 8 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的整数, 证明: 整系数多项式

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^2+1$$

在有理数域上不可约.

证明 因为对任意实数 a, $f(a)>0$, 所以 $f(x)$ 无实数根.

若 $f(x)$ 在有理数域 Q 上可约, 设

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x)$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ 是次数大于零的整系数多项式, 则 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 也没有实数根. 这样, x 取任何实数值时, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 均不改变符号. 但 $f(x)>0$, 所以 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 同号. 不妨设 $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$.

首先证明 $\partial(\varphi(x))=\partial(\psi(x))=n$. 若不然, 设 $\partial(\varphi(x))<n$ 或 $\partial(\psi(x))<n$. 若 $\partial(\varphi(x))<n$, 则由 $f(a_k)=1$, 知 $\varphi(a_k)=\psi(a_k)=1$ $(k=1,\cdots,n)$ $\varphi(x)-1$ 有 n 个根, 与根的个数不超过多项式的次数的性质矛盾. 同理可知 $\partial(\psi(x))=n$.

因为 $\varphi(x)-1$ 有 n 个整数根 $a_1,\cdots a_n$, 所以

$$\varphi(x)=1+\alpha(x-a_1)\cdots(x-a_n)$$

同理, $\psi(x)=1+\beta(x-a_1)\cdots(x-a_n)$

α, β 均为整数. 于是, 由 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, 得

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1=1+(\alpha+\beta)(x-a_1)\cdots(x-a_n)$$
$$+\alpha\beta(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2$$

比较 x^{2n} 的系数, 可知 $\alpha\beta=1$. 把它代入上面的等式, 再比较 x^n 的系数得 $\alpha+\beta=0$. 但这是不可能的, 因为满足 $\alpha\beta=1$ 且 $\alpha+\beta=0$ 的整数 α 和 β 不存在. 所以, $f(x)$ 在有理数域上不可约.

二、唯一分解定理的应用

例 9 设 $f(x)$, $g(x)\in P[x]$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式指的是 $P[x]$ 中满足以下条件的多项式 $m(x)$:

(a) $f(x)\mid m(x), g(x)\mid m(x)$;

(b) 若 $h(x)\in P[x]$，且 $f(x)\mid h(x), g(x)\mid h(x)$，则 $m(x)\mid h(x)$.

$f(x), g(x)$ 的首项系数为 1 的最小公倍式记作$[f(x), g(x)]$. 试证明：

(1)如果$f(x). g(x)$是$P[x]$中首项系数为1的多项式，且次数都大于零，它们的标准分解式分别为$f(x)=p_1^{k_1}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)q_{r+1}^{k_{r+1}}(x)\cdots q_s^{k_s}(x)$，$g(x)=p_1^{l_1}(x)\cdots p_r^{l_r}(x)t_{r+1}^{l_{r+1}}(x)\cdots t_u^{l_u}(x)$，其中$q_i(x)\neq tj(x)$，$(i=r+1,\cdots,s; j=r+1,\cdots,u)$，则$[f(x),g(x)]=p_1^{m_1}(x)\cdots p_r^{m_r}(x)q_{r+1}^{k_{r+1}}(x)\cdots q_s^{k_s}(x)t_{r+1}^{l_{r+1}}(x)\cdots t_u^{l_u}(x)$，其中 $m_i=\max(k_i, l_i)$ $(i=1,2,\cdots,r)$.

(2)$[f(x), g(x)](f(x), g(x)) = f(x)g(x)$.

证明 (1)易见$m(x)=p_1^{m_1}(x)\cdots p_r^{m_r}(x)q_{r+1}^{k_{r+1}}(x)\cdots q_s^{k_s}(x)t_{r+1}^{l_{r+1}}(x)\cdots t_u^{l_u}(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公倍式. 设$K(x)$是$f(x), g(x)$的任一公倍式，只需证$m(x)\mid K(x)$. 因为$f(x)\mid K(x), g(x)\mid K(x)$，所以$p_i^{m}i(x), q_j^{kj}(x), t_v^{lv}(x)(i=1,\cdots,r; j=r+1,\cdots,s; v=r+1,\cdots,u)$都整除 $K(x)$. 又因为它们两两都是互素的，由互素多项式乘积性质得 $m(x)\mid K(x)$.

(2) 证法一　因为$(f(x), g(x)) = p_1^{h_1}(x)\cdots p_r^{h_r}(x)$，其中 $h_i=\min(k_i, l_i)$，而 $\max(k_i, l_i)+\min(k_i, l_i) = k_i + l_i (i=1,2,\cdots,r)$，所以$[f(x), g(x)](f(x), g(x)) = f(x)\cdot g(x)$.

证法二　设 $f(x) = d(x)f_1(x), g(x) = d(x)g_1(x), d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式，则 $(f_1(x), g_1(x)) = 1, f(x)g(x) = d(x)[d(x)f_1(x)g_1(x)]$. 今证$d(x)f_1(x)g_1(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式. 令 $m(x) = d(x)f_1(x)g_1(x)$，(a)$f(x)\mid m(x), g(x)\mid m(x)$ 是显然的，(b) 设 $f(x)\mid M(x), g(x)\mid M(x)$，则 $M(x) = f(x)q_1(x) = d(x)f_1(x)q_1(x), M(x) = g(x)q_2(x) = d(x)g_1(x)q_2(x)$. 从而 $d(x)f_1(x)q_1(x) = d(x)g_1(x)q_2(x)$. 而$d(x)\neq 0$，所以有 $f_1(x)q_1(x) = g_1(x)q_2(x)$. 于是 $g_1(x)\mid f_1(x)q_1(x)$. 但 $(f_1(x), g_1(x)) = 1$，故

$g_1(x)|q_1(x), q_1(x)=g_1(x)\bar{q}_1(x)$. 那么, $M(x)=d(x)f_1(x)g_1(x)\bar{q}_1(x)$ $=m(x)\bar{q}_1(x)$. 因此, $m(x)|M(x)$. 故$m(x)=d(x)f_1(x)g_1(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式. 从而有$f(x)g(x)=(f(x),g(x))\cdot[f(x),g(x)]$.

两种证法相比较,用标准分解式要简便得多.

由本例可以看出,如果已求得两个多项式的标准分解式,那么容易得到它们的最大公因式及最小公倍式. 但是,求多项式的标准分解式没有一般方法,有时甚至是很困难的,本例提供的结果主要在于理论上的价值.

例 10 证明:数域 P 上一个次数大于零的多项式 $f(x)$ 是 P 上某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是对任意 $g(x)\in P[x]$, 或者 $(f(x),g(x))=1$, 或者存在一个正整数 m 使得 $f(x)|g^m(x)$.

证明 必要性 设 $f(x)=p^k(x)$, $p(x)$ 在 P 上不可约, $k>0$, 则对任意 $g(x)\in P[x]$, 有 $(p(x),g(x))=1$ 或 $p(x)|g(x)$. 如果 $(p(x),g(x))=1$, 那么 $(p^k(x),g(x))=1$, 即 $(f(x),g(x))=1$. 如果 $p(x)|g(x)$, 那么, $p^k(x)|g^k(x)$, 即 $f(x)|g^k(x)$.

充分性 已知 $\partial(f(x))>0$, 设 $f(x)=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)$, $p_j(x)$ 是不相同的不可约多项式. 仅须证 $r=1$. 用反证法. 如果 $r\geqslant 2$, 取 $g(x)=p_1(x)$. 因为 $p_1(x)|f(x)$, 所以 $(p_1(x),f(x))\neq 1$. 由题设条件,存在正整数 m 使 $f(x)|p_1{}^m(x)$, 从而有 $p_1{}^m(x)=f(x)q(x)=p_1{}^{k_1}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)q(x)$. 若 $m\leqslant k_1$, 则 $p_1^{k_1-m}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)q(x)=1$. 矛盾. 若 $m>k_1$, 则 $p_1{}^{m-k_1}(x)=p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)q(x)$. 于是 $p_j(x)|p_1(x)$. 这与 $(p_1(x),p_j(x))=1$ 矛盾. 故 $r\geqslant 2$ 不可能. 因此 $r=1$, 即 $f(x)=p_1^{k_1}(x)$.

例 11 数域 P 上的一个 $n(n>0)$ 次多项式 $f(x)$ 能被它的导数 $f'(x)$ 整除的充分必要条件是 $f(x)=a(x-b)^n(a,b\in P)$.

证明 充分性 因为$f(x)=a(x-b)^n$, $f'(x)=na(x-b)^{n-1}$, 所以 $f'(x)|f(x)$.

必要性 设 $f(x)=ap_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_t^{m_t}(x)$ 是 $f(x)$ 的标准分解

式，而 $f'(x) = p_1^{m_1-1}(x)p_2^{m_2-1}(x)\cdots p_t^{m_t-1}(x)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 不能被任何 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,t)$ 整除. 由 $f'(x)\mid f(x)$，知 $\varphi(x)=c$，c 是非零常数. 设 $\partial(p_i(x))=k_i$，则 $\partial(f(x))=n=m_1k_1+m_2k_2+\cdots+m_tk_t$. 又 $\partial(f(x))=\partial(f'(x))+1$，所以 $n=(m_1-1)k_1+(m_2-1)k_2+\cdots+(m_t-1)k_t+1$. 从而 $n-1=n-(k_1+k_2+\cdots+k_t)$. 因此 $k_1+k_2+\cdots+k_t=1$. 故 $k_t=1,t=1$. 也就是 $f(x)=ap^k(x)$，此处 $\partial(p(x))=1$. 设 $p(x)=x-b$，则 $f(x)=a(x-b)^n$.

§5　多项式函数和多项式的根

基本概念与结论

一、定义

1. 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P[x]$，$\alpha\in P$，用 α 代 x 所得的数 $\sum_{i=0}^{n}a_i\alpha^i$ 称为 $f(x)$ 当 $x=\alpha$ 时的值，用符号 $f(\alpha)$ 表示.

这样，对于数域 P 中的每一个数 c，令 P 中唯一确定的数 $f(c)$ 与它对应，就得到 P 到 P 的一个映射. 这个映射是由多项式 $f(x)$ 所确定的，叫做 P 上一个**多项式函数**.

2. 当 $f(\alpha)=0$ 时，称 α 是多项式 $f(x)$ 的**根**. 若 $x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，则称 α 是 $f(x)$ 的 k **重根**；当 $k=1$ 时，称 α 是 $f(x)$ 的**单根**；当 $k>1$ 时，称 α 是 $f(x)$ 的**重根**.

二、性质

1. **余数定理**　用一次多项式 $x-\alpha$ 除多项式 $f(x)$ 所得的余式等于当 $x=\alpha$ 时 $f(x)$ 的值 $f(\alpha)$.

2. **因式定理**　$x-\alpha\mid f(x)$ 的充分必要条件是 $f(\alpha)=0$.

3. P 上的每个 n 次多项式在 P 内至多有 n 个根（重根按重数计）.

4. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是数域 P 上次数不大于 n 的两个多项式，则 $f(x)=g(x)$ 的充分必要条件是在 P 内至少有 $n+1$ 个不同的数 a_i 使 $f(a_i)=g(a_i)(i=1,2,\cdots,n+1)$.

这一结论表明，数域上的多项式既可以作为形式表达式来处理，又可以作为函数来处理.

5. **拉格朗日插值公式**　设 $a_1,\cdots a_{n+1}$ 是 P 中 $n+1$ 个互异数，$b_1,\cdots,b_{n-1}$ 是 P 中任意 $n+1$ 个数，则 P 上的多项式

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}b_i$$

的次数 $\leqslant n$，并且满足 $L(a_i)=b_i(i=1,\cdots,n+1)$.

三、复数域、实数域上多项式的根的性质

1. 代数基本定理　每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中至少有一根.

2. n 次复系数多项式在复数域内恰有 n 个根(重根按重数计算).

3. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0)$ 的 n 个根，则根与多项式的系数之间的关系是：

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\dfrac{a_1}{a_0}, \quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\dfrac{a_2}{a_0}\\ \cdots\cdots\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r\leqslant n}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\cdots\alpha_{k_r}=(-1)^r\dfrac{a_r}{a_0}, \quad \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}\\ \cdots\cdots\end{cases}$$

4. 如果 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的一个非实的复数根，则它的共轭数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根，并且 α 与 $\bar{\alpha}$ 有同一重数.

四、有理根的性质与求法

1. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是一个整系数多项式，$\dfrac{p}{q}$ 是一个有理数且 $(p,q)=1$，若 $\dfrac{p}{q}$ 是 $f(x)$ 的有理根，则有

(1)$q|a_n$, $p|a_0$.

(2) $\dfrac{f(1)}{q-p}$ 与 $\dfrac{f(-1)}{q+p}$ 都是整数.

2. 首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x)$ 的有理根一定是整数.

3. 求整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的有理根的方法：

(1) 求出 a_n 和 a_0 的所有因数.

(2) 以 a_n 的因数作分母，a_0 的因数作分子，写出所有可能的既约分数$\left\{\dfrac{p}{q}\right\}$.

(3) 对第(2)步求出的分数$\dfrac{p}{q}$进行检验，若$\dfrac{f(1)}{q-p}$与$\dfrac{f(-1)}{q+p}$都是整数，则这个$\dfrac{p}{q}$有可能是 $f(x)$ 的根，若两数不全为整数，则这个$\dfrac{p}{q}$就不会是 $f(x)$ 的根.

(4) 第(3)步筛选出来的$\dfrac{p}{q}$可能是 $f(x)$ 的根，再用 $x-\dfrac{p}{q}$ 去除$f(x)$（可用综合除法），若余数为零，则$\dfrac{p}{q}$是 $f(x)$ 的根，否则$\dfrac{p}{q}$不是$f(x)$ 的根.

应用举例

一、有理根与重根

例 1 求整系数多项式

$$f(x)=2x^6-4x^4-5x^3+10x^2-3x+6$$

的有理根.

解 $f(x)$ 的首项系数 2 的因数有 ± 1, ± 2, $f(x)$ 的常数项 6 的因数有 ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. 因此，$f(x)$ 可能的有理根是

$$\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$$

而 $f(1)=6\neq 0, f(-1)=18\neq 0$,即 ± 1 不是 $f(x)$ 的根. 因为 $(1+3)\nmid f(-1)$,所以 3 不是 $f(x)$ 的根.

同理,由于 $[1-(-3)]\nmid f(1), (1-6)\nmid f(1), [1-(-6)]\nmid f(1), (2+3)\nmid f(-1), [2-(-3)]\nmid f(1)$,故 $-3, \pm 6, \pm\frac{3}{2}$ 都不可能是 $f(x)$ 的根. 就只剩下了 $\pm 2, \pm\frac{1}{2}$ 有可能是 $f(x)$ 的根. 用综合除法检验知道 2 是 $f(x)$ 的有理根,而其余的都不是 $f(x)$ 的根. 故所求多项式的有理根只有 2.

例 2 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式,试证:如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数;那么 $f(x)$ 不能有整数根.

证明(反证法) 若 α 是 $f(x)$ 的一个整数根,则有

$$f(x)=(x-\alpha)f_1(x)$$

比较两边多项式的系数知,$f_1(x)$ 也是整系多项式,于是

$$\begin{cases} f(0)=-\alpha f_1(0) \\ f(1)=(1-\alpha)f_1(1) \end{cases}$$

因为 α 与 $1-\alpha$ 中有一个是偶数,从而 $f(0)$ 与 $f(1)$ 中有一个是偶数,这与已知条件矛盾,故 $f(x)$ 没有整数根.

例 3 设一个整系数多项式 $f(x)$ 在两个整数值 x_1 和 x_2 处的函数值都是 1 或 -1,证明:如果 $|x_1-x_2|>2$,那么 $f(x)$ 无有理根;如果 $|x_1-x_2|\leqslant 2$,且 $x_1\neq x_2$,那么 $f(x)$ 的有理根只能是 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

证明 如果 $\frac{p}{q}$ 是 $f(x)$ 的有理根,$q>0$,p,q 互素,那么

$$f(x)=(p-qx)f_1(x)$$

且 $f_1(x)$ 是整系数多项式. 于是

$$(p-qx_1)\mid f(x_1), (p-qx_2)\mid f(x_2)$$

由已知 $f(x_1)=\pm 1, f(x_2)=\pm 1$ 得

$$p-qx_1=\pm 1, p-qx_2=\pm 1$$

两式相减可得 $(x_2-x_1)q=\pm 2$,或 0. 但当 $|x_1-x_2|>2$ 时,又因

为 $q>0$，所以 $(x_2-x_1)q\neq 2,-2,0$. 因此 $|x_1-x_2|>2$ 时，$f(x)$ 没有有理根.

现在设 $|x_1-x_2|\leqslant 2$. 如果 $x_2>x_1$，那么 $x_2-x_1\leqslant 2$，于是 $x_2-x_1=1$ 或 2，这时，p 与 q 使等式 $(x_2-x_1)q=2$ 成立的唯一可能值是 $p-qx_1=1$，$p-qx_2=-1$. 也就是 $p=x_1q+1$，$q=\dfrac{2}{x_2-x_1}$. 所以，如果 $f(x)$ 有有理根，那么这个有理根只可能是

$$\frac{p}{q}=x_1+\frac{1}{q}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

如果 $x_2<x_1$，可作类似的讨论.

关于多项式的重根，若不特别声明，根总是在复数范围内讨论的，这时，多项式有无重根与有无重因式是一致的. 因此，在复数域内 $f(x)$ 有重根的充分必要条件是 $(f(x),f'(x))\neq 1$.

例 4 求多项式 x^3+px+q 有重根的条件.

解法一 令 $f(x)=x^3+px+q$，则

$$f'(x)=3x^2+p$$

显然，当 $p=0$ 时，只有当 $q=0$，$f(x)=x^3$ 才有重根（重数是 3）.

若 $p\neq 0$，且 α 是 $f(x)$ 的重根，则 α 也是 $f'(x)$ 的根，即有

$$\begin{cases} \alpha^3+p\alpha+q=0 & (11) \\ 3\alpha^2+p=0 & (12) \end{cases}$$

由(11)得 $\qquad \alpha(\alpha^2+p)=-q$

由(12)得 $\qquad \alpha^2=-\dfrac{p}{3}$

则有 $\qquad \alpha\left(-\dfrac{p}{3}+p\right)=-q,\quad \alpha=-\dfrac{3q}{2p}$

两边平方得 $\qquad \dfrac{9q^2}{4p^2}=\alpha^2=-\dfrac{p}{3}$

所以 $\qquad 4p^3+27q^2=0.$

由以上证明知，当 $4p^3+27q^2=0$ 时，多项式 x^3+px+q 有重根.

解法二 令 $f(x)=x^3+px+q$. 当 $p=q=0$ 时，$f(x)$ 有重根；当 $p\neq 0$ 时对 $f(x)$，$f'(x)$ 作辗转相除法，得余式为 $\frac{4p^3+27q^2}{4}$. 因此，$f(x)$ 有重根的条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素.

即
$$4p^3+27q^2=0$$

例 5 证明：$f(x)=x^n+ax^{n-m}+b$ 不能有重数大于 2 的非零根.

证明 $f'(x)=x^{n-m-1}[nx^m+(n-m)a]$

若 α 是 $f(x)$ 的重数大于 2 的非零根，则 α 应该是 $nx^m+(n-m)a$ 的重数大于 1 的根. 因而又应该是 $[nx^m+(n-m)a]'=nmx^{m-1}$ 的根. 但是 nmx^{m-1} 的根只有 0，这是一个矛盾，所以 $f(x)$ 没有重数大于 2 的非零根.

例 6 设 $f(x)$ 是数域 P 上的多项式，α 是 $f(x)$ 的 k 重根 $(k>0)$，且 $g(x)=f(x)-(x-\alpha)f'(x)$，问 α 是 $g(x)$ 的多少重根？

解 由题设知存在多项式 $h(x)$ 使得

$$f(x)=(x-\alpha)^k h(x),\ (x-\alpha)\nmid h(x)$$
$$g(x)=(x-\alpha)^k[(1-k)h(x)-(x-\alpha)h'(x)]$$

(1) 如果 $k>1$，那么 $(x-\alpha)\nmid[(1-k)h(x)-(x-\alpha)h'(x)]$. 否则 $(x-\alpha)\mid h(x)$ 与假设矛盾. 所以这时 α 是 $g(x)$ 的 k 重根.

(2) 如果 $k=1$，那么 $g(x)=-(x-\alpha)^2h'(x)$. 这时 α 是 $g(x)$ 的 m 重根 $(m\geqslant 2)$.

例 7 设 α 是一个无理数，$f(x)$ 是有理数域上以 α 为根的次数最低的多项式，证明：$f(x)$ 无重根.

证明 如果 $f(x)$ 有重根，那么 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在复数域上不互素. 设 $(f(x),f'(x))=d(x)$，$\partial(d(x))>0$. 因为最大公因式可由辗转相除法而得到，其运算都是有理运算，所以 $d(x)$ 与 $f(x)$，$f'(x)$ 一样是有理系数多项式. 再设 $f(x)=d(x)q(x)$，则 $q(x)$ 也是有理系数多项式，并且 $\partial(q(x))<\partial(f(x))$，$\partial(d(x))<\partial(f(x))$.

又因 $$f(\alpha)=d(\alpha)q(\alpha)=0$$
所以 $$d(\alpha)=0 \text{ 或 } q(\alpha)=0$$
不论哪种情况都和已知 $f(x)$ 是以 α 为根的次数最低的多项式矛盾，故 $f(x)$ 无重根.

最后，要指出的是，用 §4 去掉多项式因式重数的方法在多项式求根问题中有着重要的作用. 因为当多项式 $f(x)$ 有重因式时，$(f(x),f'(x))=d(x)\neq 1$，用 $d(x)$ 除 $f(x)$ 得商式 $q(x)$，$q(x)$ 与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式，我们可以把 $f(x)$ 的求根问题转化为次数较低的多项式 $q(x)$ 的求根问题. 例如：

例 8 求 $f(x)=x^7+2x^6-6x^5-8x^4+17x^3+6x^2-20x+8$ 的根.

解 $f'(x)=7x^6+12x^5-30x^4-32x^3+51x^2+12x-20$. 用辗转相除法求得 $(f'(x),f(x))=d(x)=x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$. 用 $d(x)$ 除 $f(x)$ 得商式 $q(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. $f(x)$ 与 $q(x)$ 有完全相同的不可约因式 $x-1$，$x+2$. 可见，$f(x)$ 有根 1，-2. 再用综合除法知 1 是 $f(x)$ 的四重根，-2 是 $f(x)$ 的三重根.

二、根与因式分解

当一个多项式的根比较容易求出时，利用根与一次因式的关系可以把多项式分解因式.

例 9 分别在复数域、实数域和有理数域上分解多项式 x^4+1 为不可约因式的乘积.

解 在复数域上讨论.

解法一 x^4+1 在复数域内有四个根：

$\alpha_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$，$\alpha_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$，$\alpha_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$，

$\alpha_4=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$，由因式定理，$x^4+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$.

解法二 $x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2$

$= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = (x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

$(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

在实数域上讨论. 因为 $x^4 + 1$ 的每一个一次因式的系数都含有虚数,由唯一分解定理知,在实数域上 $x^4 + 1$ 不可能含有一次因式. 所以在实数域上 $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

在有理数域上讨论. 如前所述,$x^4 + 1$ 不可能含一次因式,在实数域上 $x^4 + 1$ 的每一个二次不可约因式的系数都含有无理数,由唯一分解定理知,在有理数域上 $x^4 + 1$ 不可能含有二次不可约因式. 所以 $x^4 + 1$ 在有理数域上的不可约因式分解就是 $x^4 + 1$.

例 10 给出实系数四次多项式在实数域上所有不同的标准分解式.

解 实数域上首项系数为 1 的不可约多项式为 $x + a$ 或 $x^2 + px + q$,这里 a,p,q 都是实数,且 $p^2 < 4q$. 下面我们根据四次多项式的根的各种可能情况得出它的标准分解式.

1. 都是实根时,有

(1) $f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$,($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 两两互异,均为单根)

(2) $f(x) = a(x - \alpha_1)^2(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$,($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,两两互异,一个 2 重根,两个单根)

(3) $f(x) = a(x - \alpha_1)^3(x - \alpha_2)$,($\alpha_1 \neq \alpha_2$,一个3重根,一个单根)

(4) $f(x) = a(x - \alpha_1)^4$,(一个 4 重根)

2. 既有实根又有非实数根时,由虚根成对出现的定理可知,只能有两个实根 α_1,α_2 与两个互为共轭的虚数根 $\beta,\bar{\beta}$ 这种情况. 这时,有

(1) $f(x) = a[x^2 - (\beta + \bar{\beta})x + \beta\bar{\beta}](x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$,($\alpha_1 \neq \alpha_2$)

(2) $f(x) = a[x^2 - (\beta + \bar{\beta})x + \beta\bar{\beta}](x - \alpha_1)^2$,($\alpha_1 = \alpha_2$)

3. 全为非实数根时，设 $\alpha,\bar{\alpha},\beta,\bar{\beta}$ 是根，则有

(1) $f(x)=a[x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha}][x^2-(\beta+\bar{\beta})x+\beta\bar{\beta}],(\alpha\neq\beta)$

(2) $f(x)=a[x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha}]^2,(\alpha=\beta)$

以上 8 个式子就是实系数四次多项式在实数域上所有不同的标准分解式.

例 11 求多项式 x^n-1 在复数范围内和实数范围内的因式分解.

解 在复数范围内，$f(x)=x^n-1$ 的 n 个根是

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$$

所以 $$f(x)=(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)\cdots(x-\varepsilon_{n-1})$$

在实数范围内，当 n 是奇数时，$f(x)=x^n-1$ 只有一个实根 $\varepsilon_0=1$. 因为 $$\bar{\varepsilon}_j=\varepsilon_{n-j}(0<j<n)$$

所以 x^n-1 的非实根 $\varepsilon_1,\varepsilon_{n-1};\varepsilon_2,\varepsilon_{n-2};\cdots;\frac{\varepsilon_{n-1}}{2},\frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$ 可按相互共轭配成 $\frac{n-1}{2}$ 对. 又因为

$$\begin{aligned}(x-\varepsilon_j)(x-\varepsilon_{n-j})&=[x^2-(\varepsilon_j+\varepsilon_{n-j})x+\varepsilon_j\varepsilon_{n-j}]\\&=x^2-2x\cos\frac{2j\pi}{n}+1\quad(0<j<n)\end{aligned}$$

是实系数不可约多项式. 所以 $f(x)=x^n-1$ 在实数域上的分解式为

$$f(x)=(x-1)\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}(x^2-2x\cos\frac{2j\pi}{n}+1)$$

当 n 是偶数时，x^n-1 的实根有两个：

$$\varepsilon_0=1 \text{ 和 } \varepsilon_{\frac{n}{2}}=-1$$

x^n-1 的另外 $n-2$ 个非实根又可按共轭关系配成 $\frac{n}{2}-1$ 对：$\varepsilon_1,\varepsilon_{n-1};\varepsilon_2,\varepsilon_{n-2};\cdots;\varepsilon_{\frac{n}{2}-1},\varepsilon_{\frac{n}{2}+1}$.

所以 $$f(x)=(x+1)(x-1)\prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}(x^2-2x\cos\frac{2j\pi}{n}+1)$$

例 12 试证：没有实根的首项系数大于零的实系数多项式，可以表成两个实系数多项式的平方和.

证明 设 $f(x)$ 是一个首项系数大于零的没有实根的实系数多项式，那么 $f(x)$ 的次数一定是偶数，而且其根一定是一些共轭虚数对，设其根为 $\alpha_1,\bar{\alpha}_1;\alpha_2;\bar{\alpha}_2;\cdots\alpha_s,\bar{\alpha}_s$. 再设

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)=f_1(x)+if_2(x)$$

其中 $f_1(x),f_2(x)$ 都是实系数多项式，那么

$$(x-\bar{\alpha}_1)(x-\bar{\alpha}_2)\cdots(x-\bar{\alpha}_s)=f_1(x)-if_2(x)$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)(x-\bar{\alpha}_1)(x-\bar{\alpha}_2)\cdots(x-\bar{\alpha}_s)\\&=c(f_1(x)+if_2(x))(f_1(x)-if_2(x))\\&=(\sqrt{c}\,f_1(x))^2+(\sqrt{c}\,f_2(x))^2\end{aligned}$$

式中 c 是 $f(x)$ 的首项系数，$\sqrt{c}\,f_1(x)$，$\sqrt{c}\,f_2(x)$ 都是实系数多项式.

三、根与整除性

例 13 证明 $(x^2+x+1)\mid(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3l+2})$，其中 m,n,l 是非负整数.

证法一 记 $f(x)=x^2+x+1$，$g(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3l+2}$. 由 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ 知 $f(x)$ 的两个根 ω_1,ω_2 是三次单位根，即 $\omega_i^3=1,\omega_i\neq1(i=1,2)$ 且 $\omega_1\neq\omega_2$，$g(\omega_i)=\omega_i^{3m}+\omega_i^{3n+1}+\omega_i^{3l+2}=1+\omega_i+\omega_i^2=0$. 由因式定理知 $x-\omega_i\mid g(x)(i=1,2)$. 而 $x-\omega_1,x-\omega_2$ 互素，由互素性质知 $(x-\omega_1)(x-\omega_2)\mid g(x)$. 即 $f(x)\mid g(x)$.

证法二 由 § 2 例 4 知 $(x^3-1)\mid(x^{3m}-1)$，$(x^3-1)\mid(x^{3n}-1)$，$(x^3-1)\mid(x^{3l}-1)$. 把 $g(x)$ 变形为 $g(x)=(x^{3m}-1)+(x^{3n+1}-x)+(x^{3l+2}-x^2)+(1+x+x^2)$，由于 $f(x)\mid(x^3-1)$，$f(x)\mid(x^2+x+1)$，所以 $f(x)$ 整除 $g(x)$ 的各个项，从而 $f(x)\mid g(x)$.

由证法一可以得到更一般的结果：如果 $f(x)$ 有 s 个不同的根

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，且每个根 α_i 都是 $g(x)$ 的根，那么 $f(x)\mid g(x)$. 用这一结果证明一个多项式整除另一个多项式，有时是方便的.

例 14　试问在什么条件下 x^4+x^2+1 能整除 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3l+2}$，这里 m,n 和 l 是非负整数.

分析　本题无论用带余除法还是整除定义来解都是很困难的，我们从 x^4+x^2+1 的根着手考虑.

解　因为 $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$，由上例知 $(x^2+x+1)\mid(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3l+2})$. 又因为 x^2+x+1 与 x^2-x+1 互素，所以只须考虑 $(x^2-x+1)\mid(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3l-2})$ 的条件.

设 λ 是 x^2-x+1 的任一根，则 $\lambda^2-\lambda+1=0$.

由　$\lambda^3+1=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)=0$ 可知 $\lambda^3=-1$. 于是

$$\begin{aligned}\lambda^{3m}+\lambda^{3n+1}+\lambda^{3l+2}&=(-1)^m+(-1)^n\lambda+(-1)^l\lambda^2\\&=(-1)^m+(-1)^n\lambda+(-1)^l(\lambda-1)\\&=(-1)^m-(-1)^l+[(-1)^n+(-1)^l]\lambda\end{aligned}$$

所以，当 $(-1)^m=(-1)^l=-(-1)^n$ 时，λ 是 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3l+2}$ 的根. 注意到 x^2-x+1 无重根，便知当 $m,l,n+1$ 的奇偶性相同时，$(x^2-x+1)\mid(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3l+2})$，从而 $(x^4+x^2+1)\mid(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3l+2})$.

例 15　证明：如果 $(x^2+x+1)\mid[(f_1(x^3)+xf_2(x^3)]$，那么 $(x-1)\mid f_1(x)$，$(x-1)\mid f_2(x)$.

分析　由因式定理，仅证 $f_1(1)=f_2(1)=0$.

证明　因为 $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$，所以 x^2+x+1 的两个根是三次单位根 ω 和 ω^2，其中

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

由 $(x^2+x+1)\mid[f_1(x^3)+xf_2(x^3)]$ 可知 ω 和 ω^2 也都是 $f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ 的根. 注意到 $\omega^3=1$，所以有

$$\begin{cases} f_1(1) + \omega f_2(1) = 0 \\ f_1(1) + \omega^2 f_2(1) = 0 \end{cases}$$

解此方程组得 $f_1(1) = 0, f_2(1) = 0$.

由因式定 理,得 $(x-1) \mid f_1(x), (x-1) \mid f_2(x)$

例16 证明:$(x^n-1, x^m-1) = x^d-1$ 的充分必要条件是 m,n 为 d 的最大公因数.

证明 必要性 因为 $(x^n-1, x^m-1) = x^d-1$,所以 x^d-1 是 x^n-1 与 x^m-1 的公因式. 由 §2 例 4 知 $d \mid m, d \mid n$. 设 $d' \mid m, d' \mid n$, 那么 $x^{d'}-1 \mid x^m-1, x^{d'}-1 \mid x^n-1$. 从而 $x^{d'}-1 \mid x^d-1, d' \mid d$. 因此, d 是 m,n 的最大公因数.

充分性 设 d 是 m,n 的最大公因数,由 §2 例 4 有 $x^d-1 \mid x^m-1$, $x^d-1 \mid x^n-1$.

若 $h(x) \mid x^m-1, h(x) \mid x^n-1$,今证 $h(x) \mid x^d-1$. 因为 d 是 m,n 的最大公因数,所以存在整数 u,v 使 $um + vn = d$. 设 α 是 $h(x)$ 的任一根,则 α 必是 x^m-1, x^n-1 的公共根. 那么 $\alpha^d = \alpha^{um+vn} = (\alpha^m)^u \cdot (\alpha^n)^v = 1$. 因此 $h(x)$ 的任一根都是 x^d-1 的根. 又因为单位根都是单根,所以 $h(x)$ 的根互不相同. 故 $h(x) \mid x^d-1$. 所以 x^d-1 是 x^m-1 与 x^n-1 的最大公因式.

例17 试求能使 $1+x+x^2+\cdots+x^m$ 整除 $1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$ 的所有整数对 (m,n).

解 因为 $1+x+x^2+\cdots+x^m = \dfrac{x^{m+1}-1}{x-1}$, $1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn} = \dfrac{x^{(m+1)n}-1}{x^n-1}$,所以 $(1+x+\cdots+x^m) \mid (1+x^n+\cdots+x^{mn})$ 的充要条件是

$$(x^{m+1}-1)(x^n-1) \mid (x-1)(x^{(m+1)n}-1) \tag{13}$$

下面考虑(13)式成立的充分必要条件. 设(13)成立, $x^{m+1}-1$, x^n-1 的全部根分别是 $1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{m+1}; 1, \omega_2, \cdots, \omega_n$,它们显然都是 $x^{(m+1)n}-1$ 的根. 由于 $x^{(m+1)n}-1$ 没有重根,所以 ε_i, ω_j 互不相同. 从而

$x-\varepsilon_i, x-\omega_j(i=2,\cdots,m+1; j=2,\cdots,n)$两两互素. 因此$x^{m+1}-1$与$x^n-1$的公因式只有$x-1$,即$(x^{m+1}-1,x^n-1)=x-1$. 由例16知,$(m+1,n)=1$.

反之,若$(m+1,n)=1$,则$(x^{m+1}-1,x^n-1)=x-1$. 所以,$x^{m+1}-1=(x-1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{m+1})$与$x^n-1=(x-1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_n)$的分解式中,除有公因式$x-1$外,$x-\varepsilon_i, x-\omega_j(i=2,\cdots,m+1; j=2,\cdots,n)$两两互素,且$\varepsilon_i,\omega_j$都是$x^{(m+1)n}-1$的根. 所以$x-\varepsilon_i$,$x-\omega_j$都整除$x^{(m+1)n}-1$. 再由互素性质知,$(x^{m+1}-1)(x^n-1)\mid(x^{(m+1)n}-1)(x-1)$. 所以$1+x+\cdots+x_m$整除$1+x^n+\cdots+x^m n$的充分必要条件是$(m+1,n)=1$.

例 18 设$f(x),g(x)$是复系数多项式,$(f(x),g(x))=1$,且$\partial(f(x))\neq\partial(g(x))$,$c$是非零复数,证明:至少存在一个复数$\alpha$,使得$\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=c$.

证明 因为$\partial(f(x))\neq\partial(g(x))$,所以$\partial(f(x)-cg(x))>0$. 由代数基本定理知,$f(x)-cg(x)$至少有一个复数根$\alpha$,即$f(\alpha)-cg(\alpha)=0$.

$g(\alpha)\neq 0$,否则若$g(\alpha)=0$,由$f(\alpha)-cg(\alpha)=0$可得$f(\alpha)=0$,从而$x-\alpha\mid f(x)$,即$x-\alpha$是$f(x)$与$g(x)$的公因式,这与$(f(x),g(x))=1$矛盾. 于是由$f(\alpha)=cg(\alpha)$. 即可得出$\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=c$. 证毕.

习 题

1. 证明:对任意非负整数n,均有

$$x^2+x+1\mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$$

2 设μ是$x^3+3x^2+3x+2=0$的非整数根,且$(x^2+x)f(x)+(x^2+x+1)g(x)+(x^3+3x^2+3x+2)h(x)+(x+1)(x-\mu^2)\varphi(x)=0$,其中$f(x),g(x),h(x),\varphi(x)$是多项式,证明:

$$x - \mu^2 \mid f(x)$$

3. 设 m,n 为大于 1 的整数，证明：当且仅当 m 与 n 互素时，多项式

$$f(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1$$

与 $$g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \text{ 互素.}$$

4. (1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 是两个互素的多项式 $r_1(x)$，$r_2(x)$ 是任意的两个多项式，它们的次数分别小于 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的次数. 证明：存在一个多项式 $g(x)$，它被 $f_1(x)$ 除得到的余式是 $r_1(x)$，它被 $f_2(x)$ 除得到的余式是 $r_2(x)$.

(2) 求 $g(x)$，它被 x^2+1 除余式为 $x+1$，它被 x^3+x^2+1 除余式为 x^2-1.

5. 求 $x^n + a^n$ 与 $x^m + a^m$ 的最大公因式 $(a \neq 0)$.

6. 证明：$(f^m g^h, kf^s + pg^t) = 1$ 的充分必要条件是 $(f,g) = 1$，其中 f,g 为多项式，k,s,p,t,m,h 是自然数.

7. 在复数域和实数域上，分解 $x^n - 2$ 为不可约多项式的乘积.

8. 设 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 是整系数多项式，证明：如果 $bd + dc$ 是奇数，那么 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

9. 求多项 $f(x) = x^5 + ax^3 + b$ 有非零二重根的条件.

10. (1) 问 $f'(x)$ 的 m 重根是否一定为 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根？

(2) 若 a 是 $f(x)$ 与 $f^{(k-1)}(x)$ 的根，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的根，问 a 是否为 $f(x)$ 的 k 重根？

11. 设 $f(x), g(x), h(x), k(x)$ 都是多项式，且 $f(x^5) + xg(x^5) + x^2h(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)k(x)$

证明：$x - 1 \mid f(x)$.

12. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 是整系数多项式，证明：若 a_0 与 a_n 都是奇数，并且 $f(1)$ 与 $f(-1)$ 中至少有一个是奇数，则 $f(x)$ 没有有理根.

13. 设 Q 是有理数域，p 是素数，$f(x) = x^p - a$ 是有理数域上的多项式，证明：$f(x)$ 或者在 Q 上不可约，或者在 Q 中有一个根.

14. 设整系数多项式 $f(x)$ 对某个整数 m 使得 $f(m)$ 和 $f(m+1)$ 都是奇数，证明 $f(x)$ 没有整数根.

15. 证明：如果有理系数多项式 $f(x)$ 有一个无理根 $a + b\sqrt{d}$，其中 a,b,d 是有理数而 $\sqrt{d}$ 是无理数，那么 $a - b\sqrt{d}$ 也是 $f(x)$ 的根.

16. 设 $f(x)$ 为一复系数多项式，$\bar{f}(x)$ 是 $f(x)$ 的所有系数换成其共轭复数所得的多项式. 证明：如果 $f(x)$ 与 $\bar{f}(x)$ 互素，那么 $f(x)$ 没有实数根. 问：反之

如何?

17. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式,且 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=p$,p 是一个素数. 证明:对任意整数 m 均有 $f(m)\neq 2p$.

18. 证明:不存在次数为 $n\geqslant 1$ 的整系数多项式 $f(x)$,使得对任意整数值 m,$f(m)$ 是素数.

19. 证明:如果有常数 $c\neq 0$,使得 $f(x-c)=f(x)$,那么 $f(x)$ 是一个常数.

20. 已知 $f(x)$ 是一个 n 次多项式,对于 $k=0,1,\cdots,n$ 时有 $f(k)=\dfrac{k}{k+1}$,试求 $f(n+1)$.

21. 设 $n(n\geqslant 1)$ 次整系数多项式 $f(x)$ 在多于 n 个 x 的整数值处取值 1 或 -1,证明:$f(x)$ 在有理数域上不可约.

22. 设 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 是互异整数,n 为正奇数,证明:$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1$ 在有理数域上不可约.

第二章　行列式与矩阵运算

§1　n阶行列式的计算

基本概念与结论

一、排列和逆序

n个自然数$1,2,3,\cdots,n$,由它们组成的一个有序数组$(i_1i_2\cdots i_n)$叫做一个n元**排列**.n元排列总共有$n!$个.

1. 逆序:在一个排列$(i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)$中,若数$i_t > i_s$,则称这两个数组成一个**逆序**.

2. 逆序数:一个排列中,逆序的总数叫做此排列的**逆序数**.记作$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.当τ为奇数时,这个排列叫做**奇排列**;当τ为偶数时,这个排列叫做**偶排列**.

二、n阶行列式的定义

定义　n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行,不同列的n个元素的乘积$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$的代数和.$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$的符号为$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$(其行下标是按自然顺序排列的).即

$$D = \sum_{(i_1i_2\cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

这里 $\sum\limits_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}$ 是对所有 n 元排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 求和.

三、行列式的性质

1. 把行列式的行和列互相调换,行列式的值不变.

2. 如果行列式中某一行(或列)中各元素都有公因子 k,那么 k 可以提到行列式符号之外.

如果行列式中有一行(或列)都是零,那么行列式的值必为零.

3. 如果互换行列式的任意两行(或列),那么行列式反号.

如果行列式中有两行(或列)对应元素相同,那么行列式等于零.

如果行列式中有两行(或列)的对应元素成比例,那么行列式等于零.

4. 在行列式中,如果某列(行)的各元素都是两项的和,如 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(i=1,2,\cdots n)$,那么这个行列式等于两个同阶行列式的和,这两个同阶行列式的这一列,一个是 $b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{nj}$,另一个是 $c_{1j},c_{2j},\cdots,c_{nj}$,而其余各列(行)与原来行列式相同.

5. 在行列式中,如果某一行(或列)各元素同乘数 k 加到另一行(或列)的对应元素上去,那么行列式的值不变.

6. 在行列式中,如果某行(或列)各元素是其余各行(或列)分别乘一常数后各对应元素之和,那么行列式的值为零.

四、行列式按照一行(列)展开

1. 余子式:n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的元素划去后剩下的元素按照原来的次序排列而得到的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记为 M_{ij}. 令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

2. 行列式等于它的任何一行(或列)的所有元素分别与它们所对应的代数余子式的乘积之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

其中，$i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,n$.

3. 行列式的任何一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和必为零. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$a_{1s}A_{1t} + a_{2s}A_{2t} + \cdots + a_{ns}A_{nt} = 0 \quad (s \neq t)$$

五、行列式的拉普拉斯展开

1. k 阶子式：在 n 阶行列式中，任取 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 行 k 列上的元素，按原来的相对位置构成的 k 阶行列式，称为这个 n 阶行列式的一个 **k 阶子式**，记为 M_i.

2. k 阶子式的代数余子式：在 n 阶行列式中，如果划去某个 k 阶子式所在的 k 行 k 列，剩下的元素按原来次序所构成的 $n-k$ 阶行列式叫做这个 **k 阶子式 M_i 的余子式**，记为 M_i'. 假如某 k 阶子式所在的行的序数是 $i_1, i_2, \cdots, i_k$，所在列的序数是 $j_1, j_2, \cdots, j_k$，那么

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} M_i' = A_i$$

叫做这个 **k 阶子式 M_i 的代数余子式**.

3. 拉普拉斯展开式

在 n 阶行列式中，任意取定第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行 $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$，则这 k 个行中所有的 k 阶子式 M_i (共有 $C_n^k = c$ 个) 分别与它们的代数余子式 A_i 乘积之和就是行列式的值 Δ_n. 即

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{c} M_i A_i = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_cA_c$$

六、乘法规则

设 A 与 B 都是 n 阶方阵，则 $|A|\cdot|B| = |AB|$

应用举例

行列式的计算，是高等代数课程中的重要内容之一. 有许多题目又难又繁. 如何选择适当的方法来解决问题是很重要的. 下面分类举例并介绍方法.

一、三角形法

此法是将原行列式化成上(下)三角形行列式，再求值.

例 1 计算 4 阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 考察这个数字元素行列式，各元素不是 1 就是 -1，如果利用行列式的定义来计算是很麻烦的. 但是，我们利用行列式的性质 5，可把它简化为上三角行列式. 把 D_4 的第 1 行乘以 -1 分别加到第 2 行，第 3 行，第 4 行上，得

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -a & -a & \cdots & -a & -a \\ a & x & -a & \cdots & -a & -a \\ a & a & x & \cdots & -a & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x & -a \\ a & a & a & \cdots & a & -a \end{vmatrix}$$

解 此行列式主对角线下方全是a,而最后一列全是$-a$,我们利用性质5,将最后一列分别加到前面的各列上,得

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a & & & & * \\ & x-a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x-a & \\ 0 & & & & -a \end{vmatrix}=(-a)(x-a)^{n-1}$$

例3 计算$n(n\geqslant 2)$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解 根据D_n的特点,主对角线下面都是3. 当$n=2$时,$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2-9=-7$. 当$n\geqslant 3$时,将$D_n$的第三行乘以$-1$后加到其余各行,得

$$D_n=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

再将第三列乘以-1后加到其余各列,得

$$D_n=\begin{vmatrix}-2&0&0&0&0&\cdots&0\\0&-1&0&0&0&\cdots&0\\0&0&3&0&0&\cdots&0\\0&0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&0&\cdots&n-3\end{vmatrix}$$

$$=(-2)(-1)\cdot 3\cdot(n-3)!=6(n-3)!$$

二、递推法

此法的要点是：利用已给行列式 D_n 的特点，建立起同类型的 n 阶行列式和 $n-1$ 阶（或更低阶）行列式之间的关系式. 这个关系式叫**递推关系式**. 再根据递推关系式，求出 D_n 的一般表示式.

例 4 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^{n-2}&x_1^{n-1}\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^{n-2}&x_2^{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&x_{n-1}&x_{n-1}^2&\cdots&x_{n-1}^{n-2}&x_{n-1}^{n-1}\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^{n-2}&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

称此行列式为**范德蒙行列式**($n\geqslant 2$).

解 从 D_n 的最后一列开始，依次将前一列的 $-x_n$ 倍加到后一列上，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&x_1-x_n&x_1(x_1-x_n)&\cdots&x_1^{n-3}(x_1-x_n)&x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&x_{n-1}-x_n&x_{n-1}(x_{n-1}-x_n)&\cdots&x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1}-x_n)&x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)\\1&0&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)D_{n-1}$$

$$=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})D_{n-1}$$

这就是要找的递推关系式. 按这个规律可得如下的一系列等式

$$D_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})D_{n-1}$$

$$D_{n-1} = (x_{n-1} - x_1)(x_{n-1} - x_2)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})D_{n-2}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$D_3 = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)D_2$$

$$D_2 = (x_2 - x_1)$$

逐次向上代入各等式,即有

$$\begin{aligned} D_n = & (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1}) \\ & \times (x_{n-1} - x_1)(x_{n-1} - x_2)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ & \times (x_2 - x_1) \\ = & \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) \end{aligned}$$

例 5 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

解 我们仍用递推关系来解此题. 把行列式先按第 1 行展开得两个行列式,第二个行列式再按第 1 列展开,得

$$D_n = (\alpha + \beta)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{(n-1\text{ 阶})}$$

$$-\alpha\beta\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}(n-2\text{阶})$$

等号右边的两个行列式比原行列式降了一阶和二阶，但形式和原行列式完全一样. 分别用 D_{n-1} 和 D_{n-2} 表示，有

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} \tag{1}$$

这就是要找的递推关系式. 当 $n > 3$ 时，考虑如何从(1)式找出 D_n 与 D_1, D_2 的关系. 为此，把(1)式改写为

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) \tag{2}$$

我们按照递推的方法去做，就可以得到

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3})$$
$$= \cdots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

而行列式 $D_1 = \alpha + \beta$，　$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta$，于是

$$D_2 - \alpha D_1 = \beta^2$$

代入上式，得
$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n \tag{3}$$

由(1)式又可得
$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^n \tag{4}$$

(4)式乘以 α 减(3)式乘以 β，得

$$(\alpha-\beta)D_n = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}$$

当 $\alpha \neq \beta$ 时，　$D_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$.

当 $\alpha = \beta$ 时，(3)式化为 $D_n = \alpha D_{n-1} + \alpha^n$. 连续运用这个递推公式，得　$D_n = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)\alpha^n = (n+1)\alpha^n$

注意　我们如果按 D_n 的第一列展开后再用递推公式，也可以得到同样的结果.

利用递推关系式解法的步骤是：由原行列式 D_n 出发，找到高阶行列式和一个或几个同形式的较低阶的行列式之间的关系式

(它就是递推关系式)后,由这个关系式逐次推出 D_n 与可明显求值的低阶行列式 D_1 和 D_2 等的关系,再归纳算出 D_n 的结果.

三、升阶法

为了计算行列式,有时需要将它的阶数放大,使升阶后的行列式易于计算,从而求出原行列式. 这种方法叫**升阶法**,也叫**加边法**.

例 6 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解 将 D 加一行一列,使其值不变,得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} (n+1 \text{ 阶})$$

将第一行乘以 -1 再分别加到第 $2,3,\cdots,n+1$ 行,得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

将这个 $n+1$ 阶行列式再加边成 $n+2$ 阶行列式,使其值不变,得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix} (n+2\text{阶})$$

再将第一列乘以 -1 再分别加到第 $3,4,\cdots,n+2$ 列，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

分别将第 $3,4,\cdots,n+2$ 列乘以$\frac{1}{2}$都加到第 1 列，再将第 $3,4,\cdots,$ $n+2$ 列分别乘以 $-\frac{1}{2a_1},-\frac{1}{2a_2},\cdots-\frac{1}{2a_n}$ 都加到第 2 列，得

$$D=\begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$=(-2)^n a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1-\frac{n}{2} \end{vmatrix}$$

$$= (-2)^{n-2}a_1a_2\cdots a_n\left[(2-n)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right]$$

$$= (-2)^{n-2}a_1a_2\cdots a_n\left[(2-n)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j}\right]$$

例 7 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$$

解 将 D_n 升阶为下面的 $n+1$ 阶行列式

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

即我们在原行列式中插入一行与一列，使 Δ_{n+1} 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，x 的 $n+1$ 阶范德蒙行列式，此处 x 是变数. 由此可知，D_n 是 Δ_{n+1} 的元素 x^{n-1} 的余子式，利用例 4 中范德蒙行列式的计算结果得到

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n) \\ &\quad \times (x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}) \\ &\quad \cdots\cdots \\ &\quad \times (x_3-x_1)(x_3-x_2) \times (x_2-x_1) \\ &= (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n) \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) \end{aligned}$$

故 Δ_{n+1} 是一个关于 x 的 n 次多项式，它可写成

$$\Delta_{n+1}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\{x^n+(-1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}+\cdots\}$$

另一方面，将 Δ_{n+1} 按它的第 $n+1$ 行展开，即得

$$\Delta_{n+1}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\cdot x^n+(-1)^{2n+1}D_nx^{n-1}+\cdots$$

比较 Δ_{n+1} 中关于 x^{n-1} 的系数，即得

$$D_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

上例的升阶想法比较自然(因为要化成有已知结论的范德蒙行列式)，但是，插入的最后一行(x 的幂)却不是马上可以想到的. 一般说来，升阶法是比较难掌握的，因此，只有在用其他方法不易解决，或者明显地可用升阶法解决的时候才考虑用此法.

四、数学归纳法

这个方法的第一步是观察要计算的行列式的值的一般形状，第二步是用归纳法证明它的正确性.

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n\end{vmatrix},\ \prod_{i=1}^n a_i\neq 0$$

解 第一步，观察分析综合.

当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1\\ 1 & 1+a_2\end{vmatrix}$$

$$=(1+a_1)(1+a_2)-1=1+a_1+a_2+a_1a_2-1$$

$$=a_1+a_2+a_1a_2=a_1a_2(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2})=a_1a_2(1+\sum_{i=1}^2\frac{1}{a_i})$$

当 $n=3$ 时.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)+1+1-1-a_2-1-a_3-1-a_1$$

$$= (1+a_1+a_2+a_1a_2)(1+a_3)-a_2-a_3-a_1-1$$

$$=1+a_1+a_2+a_1a_2+a_3+a_1a_3+a_2a_3+a_1a_2a_3-a_2-a_3-a_1-1$$

$$= a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+a_1a_2a_3 = a_1a_2a_3(1+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i})$$

根据以上的观察分析，对于正整数 n，我们估计

$$D_n = a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

应该成立.

第二步，利用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，由上面的直接计算可知，结论成立. 假定对这样的 $n-1$ 阶行列式结论成立，进而证明对阶数为 n 时结论也成立.

按 D_n 的最后一列，把 D_n 拆成两个行列式相加(利用了上面的性质(4))，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

把上式中的第一个行列式最后一列的 -1 倍加到前面各列，得到一个对角形行列式其值为 $a_1a_2\cdots a_{n-1}$；而第二个行列式按最后一列展开得 a_nD_{n-1}. 于是

$$D_n = a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_nD_{n-1}$$

但是，由归纳假定可知，

$$D_{n-1} = a_1a_2\cdots a_{n-1}(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i})$$

从而有

$$D_n = a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_n \cdot a_1a_2\cdots a_{n-1}(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i})$$

$$= a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i})$$

根据数学归纳法原理,结论成立.

例 9 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad (2n \text{ 阶})$$

解 当 $n = 1$ 时,有 $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$

当 $n = 2$ 时,对第二、三行作拉普拉斯展开,得

$$D_{2\cdot 2} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)(-1)^{10}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 - b^2)(a^2 - b^2)$$

$$= (a + b)^2(a - b)^2$$

假设当 $n = k$ 时,有 $D_{2k} = (a + b)^k(a - b)^k$,那么

$$D_{2(k+1)}=\begin{vmatrix} a &&&&&&& b\\ & a &&&&& b &\\ && \ddots &&& \cdot^{\cdot^{\cdot}} &&\\ &&& a & b &&&\\ &&& b & a &&&\\ && \cdot^{\cdot^{\cdot}} &&& \ddots &&\\ & b &&&&& a &\\ b &&&&&&& a \end{vmatrix}=(a+b)\begin{vmatrix} 1 &&&&&&& 1\\ & a &&&&& b &\\ && \ddots &&& \cdot^{\cdot^{\cdot}} &&\\ &&& a & b &&&\\ &&& b & a &&&\\ && \cdot^{\cdot^{\cdot}} &&& \ddots &&\\ & b &&&&& a &\\ b &&&&&&& a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)\begin{vmatrix} 1 &&&&&&& 1\\ & a &&&&& b &\\ && \ddots &&& \cdot^{\cdot^{\cdot}} &&\\ &&& a & b &&&\\ &&& b & a &&&\\ && \cdot^{\cdot^{\cdot}} &&& \ddots &&\\ & b &&&&& a &\\ 0 &&&&&&& a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)(a-b)\begin{vmatrix} a &&&&&&& b\\ & a &&&&& b &\\ && \ddots &&& \cdot^{\cdot^{\cdot}} &&\\ &&& a & b &&&\\ &&& b & a &&&\\ && \cdot^{\cdot^{\cdot}} &&& \ddots &&\\ & b &&&&& a &\\ b &&&&&&& a \end{vmatrix}(2k\text{ 阶})$$

$$=(a+b)(a-b)(a+b)^k(a-b)^k$$

$$=(a+b)^{k+1}(a-b)^{k+1}$$

因此,由数学归纳法原理知,对一切自然数 n 都有

$$D_{2n}=(a+b)^n(a-b)^n=(a^2-b^2)^n.$$

例 10 证明:当 $\alpha\neq k\pi$ 时,

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

证明　对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,上式显然成立.

假设对于小于 n 的一切自然数,上式仍然成立. 那么对于 n,按第一行展开上式左边,得

$$D_n = 2\cos\alpha D_{n-1} - \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} (n-2\text{ 阶})$$

$$= 2\cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2} = 2\cos\alpha \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

利用积化和差公式

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\alpha + \sin(n-1)\alpha - \sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

因此,根据数学归纳法原理,对于一切自然数 n,结论成立.

五、辅助行列式法

例 11　设 n 为一正整数,$a_1,a_2\cdots,a_n$ 是 n 个实数,$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是 n 个次数不大于 $n-2$ 的实系数多项式. 求证:

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

证明　如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有两个数相等,结论显然成立. 下面仅证它们互不相等的情形. 作辅助行列式

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(x) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

由假设可知，$F(x)$ 是一个次数不大于 $n-2$ 的多项式，但$F(a_2)=F(a_3)=\cdots=F(a_n)=0$，它有$n-1$个不同的根，所以$F(x)=0$. 从而特别有$F(a_1)=0$. 这就是

$$F(a_1)=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}=0.$$

六、一题多解

例 12 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解法一 将各列每个元素都写成两项之和，其中第一项为b，除主对角线上元素的第二项为$a-b$外，其余各元素第二项均为0，即

$$D_n=\begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & b+0 & \cdots & b+0 \\ b+0 & b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ b+0 & b+0 & b+(a-b) & \cdots & b+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b+0 & b+0 & b+0 & \cdots & b+(a-b) \end{vmatrix}$$

根据行列式的性质，这个行列式可分成 2^n 个行列式之和. 若其中某个行列式有两个或两个以上的列选自这个行列式各列的第一项，则该行列式至少有两列相同，其值为零. 因此，在这 2^n 个行列式中，除去值为零的外，仅剩下$n+1$个. 这$n+1$个行列式为：各列全选这个行列式各列的第二项或仅有一列选第一项，其他各列都选第二项，因此这个行列式

$$\begin{aligned} D_n &= (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1} \\ &= (a-b)^{n-1}[a+(n-1)b] \end{aligned}$$

解法二 将原行列式第 2,3,…,n 行都加到第一行上，并提出公因数 $a+(n-1)b$，得到

$$D_n=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ b & a & b & \cdots & b\\ b & b & a & \cdots & b\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$$

第 2,3,…,n 列分别减第一列，得到

$$D_n=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ b & a-b & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ b & 0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b & 0 & 0 & \cdots & & a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

解法三(升阶法) 将 D_n 添加一行及一列，构成 $n+1$ 阶行列式，使其值不变.

$$D_n=\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\ 0 & a & b & \cdots & b\\ 0 & b & a & \cdots & b\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$$

各行都减去第一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\ -1 & a-b & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a-b & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}$$

当$a=b$时，显然$D_n=0$. 当$a\neq b$时，第2，3，…，n列分别乘以$\frac{1}{a-b}$加到第1列，得$D_n=(1+\frac{nb}{a-b})(a-b)^n=(a-b+nb)(a-b)^{n-1}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$. 无论哪种情况，都有$D_n=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

解法四（递推法） 将第n列元素写成两项的和，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b+0 \\ b & a & b & \cdots & b & b+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & b+0 \\ b & b & b & \cdots & b & (a-b)+b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & 0 \\ b & a & b & \cdots & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & 0 \\ b & b & b & \cdots & b & a-b \end{vmatrix}$$

第一个行列式中各行减去最后一行，第二个行列式按最后一列展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 \\ b & b & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}+(a-b)D_{n-1}$$

所以，$D_n=b(a-b)^{n-1}+(a-b)D_{n-1}$. 因而建立了递推公式

$$D_1=a,\quad D_n=b(a-b)^{n-1}+(a-b)D_{n-1}\quad(n=2,3,\cdots)$$

因此有 $D_n=b(a-b)^{n-1}+(a-b)D_{n-1}$

$$(a-b)D_{n-1}=b(a-b)^{n-1}+(a-b)^2D_{n-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$(a-b)^{n-2}D_2 = b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1}D_1$$

故 $$D_n = (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1}a$$
$$= (a-b)^{n-1}[(n-1)b+a].$$

解法五(数学归纳法)

当 $n=2$ 时， $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$

当 $n=3$ 时， $D_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^2(a+2b).$

用数学归纳法证明 $D_n = (a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$.

设 $D_k = (a-b)^{k-1}[a+(k-1)b]$， 则

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b+0 \\ b & a & b & \cdots & b & b+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & b+0 \\ b & b & b & \cdots & b & (a-b)+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & 0 \\ b & a & b & \cdots & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & 0 \\ b & b & b & \cdots & b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= b(a-b)^k + (a-b)D_k.$$

由归纳假设 $D_k = (a-b)^{k-1}[a+(k-1)b]$，得 $D_{k+1} = b(a-b)^k + (a-b)(a-b)^{k-1}[a+(k-1)b] = (a-b)^k[a+kb]$. 即命题对 $k+1$ 成立. 因此，对任意自然数 n，都有 $D_n = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b]$.

本例的五种解法说明，在计算行列式时，要仔细分析，灵活运用，不要死套公式，这样就能较准确地求出答案来.

§2 矩阵的运算

基本概念与结论

一、矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数排成 m 行 n 列的表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 的**矩阵**. **简记为** $A = (a_{ij})_{m\times n}$. $n \times n$ **的矩阵,也称为** n **级方阵**(或 n 阶方阵). 两个矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{s\times t}$,若它们有相同的行数,相同的列数,并且各对应的元素也相同,则称为**相等**.

二、线性运算

1. 矩阵的加法:设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ 则定义

$$A + B = C = (c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,m; \quad j = 1,2,\cdots,n)$

两个矩阵 A,B 对应元素相加所得的矩阵 C 称为原两矩阵之**和**.

注意 两个矩阵具有相同的行数,相同的列数才能相加.

2. 数乘矩阵:设 k 是一个数,A 是一个 $m \times n$ 矩阵,则 k 与 A 的**乘积**定义为

$$kA = Ak = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

$= (ka_{ij})_{m \times n}$

矩阵的**线性运算**指的就是矩阵的加法与数乘，它具有下列运算规律：

(1) 交换律：$A + B = B + A$

(2) 结合律：$(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) 数与矩阵加法的分配律：$k(A + B) = kA + kB$

$$(k + l)A = kA + lA$$

(4) 数量与矩阵相乘的结合律：$k(lA) = (kl)A$

以上 A,B,C 都是 $m \times n$ 矩阵，k,l 是数量.

当 A 为 n 阶方阵时，A 的行列式记为 $|A|$，且 $|kA| = k^n|A|$.

三、矩阵的乘法

1. 设 A 是一个 $m \times s$ 矩阵，B 是一个 $s \times n$ 矩阵，定义**乘积** AB 是一个 $m \times n$ 矩阵 C，记 $C = AB = (c_{ij})_{m \times n}$，它的第 i 行第 j 列交叉点的元素 c_{ij} 是 A 的第 i 行的 s 个元素与 B 的第 j 列的 s 个对应元素的乘积之和，即

$$c_{ij} = \sum_{\mu=1}^{s} a_{i\mu}b_{\mu j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

$(i = 1,2,\cdots,m;\quad i = 1,2,\cdots,n)$

2. 矩阵乘法的性质：

(1) 结合律　$(AB)C = A(BC)$

(2) 分配律　$A(B + C) = AB + AC$

$$(A + B)C = AC + BC$$

(3) 数与乘积的结合律

$$(kA)B = A(kB) = k(AB)$$

上面的 A、B、C 都是矩阵，k 是数量.

值得注意的是：矩阵乘法不满足交换律，即

$$AB \neq BA$$

如果 $AB = BA$，矩阵 B 就称为与 A 可交换.

3. 矩阵的幂：对于方阵 A，$A^m = \overbrace{AA\cdots A}^{m个}$称为 A 的**幂**.

四、转置矩阵与特殊矩阵

1. 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行与列互换，而得到的矩阵称为 A 的**转置矩阵**，记为 A'，即

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

它的性质有：

(1) $(A')' = A$　　(2) $(kA)' = kA'$

(3) $(A+B)' = A' + B'$　　(4) $(AB)' = B'A'$

2. 零矩阵：每个元素都为零的矩阵称为**零矩阵**，记为 0.

3. 单位矩阵：主对角线元素都是 1，而其他元素全是零的 n 阶方阵，称为 n 阶**单位矩阵**，记为 E_n 或 E.

4. 数量矩阵：如下形式的矩阵称为**数量矩阵**：

$$kE = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

其中 k 是数.

5. 对称矩阵：满足 $A' = A$ 的矩阵 A 称为**对称矩阵**.

6. 反对称矩阵：满足 $A' = -A$ 的矩阵 A 称为**反对称矩阵**.

7. 正交矩阵：

(1) 满足 $AA' = A'A = E$ 的 n 阶实矩阵 A 称为**正交矩阵**.

(2) n 阶实矩阵 $A=(a_{ij})$ 是正交矩阵的充分必要条件是

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

8. n 阶方阵 E_{ij}：

(1)E_{ij} 是第 i 行第 j 列交叉元素为 1，其他元素为零的 n 阶方阵，即

$$E_{ij}=\begin{bmatrix} & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \end{bmatrix} i\text{行}$$

j 列

(2) 任一 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 可以唯一地表成：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+\cdots+a_{1n}E_{1n}+\cdots$$
$$+a_{n1}E_{n1}+\cdots+a_{nn}E_{nn}$$

9. **矩阵多项式**指的是

$$f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE$$

其中 A 是与 E 同阶的方阵.

五、逆矩阵

1. 设 A,B 都是 n 阶方阵，如果它们满足等式

$$AB=BA=E$$

那么称 A 是**可逆矩阵**，并称 B 是 A 的**逆矩阵**. A 的逆矩阵由 A 唯一决定. 由可逆矩阵 A 唯一决定的逆矩阵用 A^{-1} 表示.

2. 正交矩阵 A 是可逆的，且 $A^{-1}=A'$.

3. n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是它可以通过初等行变换化为单位矩阵.

4. n阶方阵A有逆矩阵的充分必要条件是A的行列式$|A|\neq 0$.

5. 设 A 和 B 都是 n 阶矩阵，若 $AB=E$，则 A,B 互为逆矩阵.

6. 伴随矩阵：将 n 阶行列式 $|A|$ 的 n^2 个代数余子式排成下列

n 阶矩阵.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

则 A^* 称为矩阵 A 的**伴随矩阵**.

7. 求逆矩阵的公式:设 A 为 n 阶方阵,$|A| \neq 0$,A^* 为 A 的伴随矩阵,则

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

8. 逆矩阵的性质:设 A,B 都是同阶可逆矩阵,则

(1)$(A^{-1})^{-1} = A$.

(2)AB 也可逆,且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3) 若 $k \neq 0$ 为常数,则$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

(4)A' 也可逆,且$(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

(5)$|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

六、初等变换与初等矩阵

初等变换有三种,即**倍法变换**、**换法变换**和**消法变换**. 这三种变换各自所对应的矩阵分别称为**倍法矩阵**、**换法矩阵**和**消法矩阵**. 它们统称为**初等矩阵**.

1. 初等矩阵的定义:

(1) 倍法矩阵:用一个非零数 k 乘单位矩阵的某一行(列)而得到的矩阵,称为**倍法矩阵**. 例如,k 乘 E 的第 i 行得到的倍法矩阵为

$$P(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & k & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} i \text{ 行}$$

(2) 换法矩阵：交换单位矩阵的两行(列)而得到的矩阵称为**换法矩阵**. 例如，交换 E 的第 i 行和第 j 行得到的换法矩阵为

$$P(i,j)=\begin{bmatrix}1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ & & & \vdots & & 1 & \vdots & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1\end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \cdots i\text{行} \\ \\ \\ \\ \cdots j\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(3) 消法矩阵：用一个数 k 乘单位矩阵的某一行(列)加到另外一行(列)上而得到的矩阵，称为**消法矩阵**. 例如，k 乘 E 的第 i 行加到第 j 行得到的消法矩阵为

$$P(j,i(k))=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & k & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \cdots i\text{行} \\ \\ \cdots j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

2. 初等矩阵的性质：

(1) 初等矩阵的转置仍为初等矩阵；

(2) 初等矩阵都是可逆矩阵，并且其逆矩阵仍为初等矩阵.

(3) 若矩阵 A 可逆，则 A 可以表示成一系列初等矩阵的乘积.

即
$$A=P_1P_2\cdots P_m$$
其中 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 者为初等矩阵.

3. 用初等变换求逆矩阵的方法：

(1) 对矩阵 A 施行初等变换，相当于将矩阵 A 乘(左乘或右乘)以相应的初等矩阵.

若对矩阵 A 的第 i 行乘以非零的常数 k，相当于在矩阵 A 的左

边乘上倍法矩阵 $P(i(k))$；

若将矩阵 A 的第 i 行与第 j 行对换，相当于在矩阵 A 的左边乘上换法矩阵 $P(i,j)$；

若将矩阵 A 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上，相当于在矩阵 A 的左边乘上消法矩阵 $P(j,i(k))$

同样，若对矩阵 A 施行列变换，相当于在矩阵 A 的右边乘上相应的初等矩阵.

(2) 若矩阵 A 是 n 阶可逆矩阵，则可通过一系列的初等行变换将 A 化为单位矩阵 E.

若有初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_{m-1},P_m$，使

$$P_mP_{m-1}\cdots P_2P_1A = E$$

则

$$A^{-1} = P_mP_{m-1}\cdots P_2P_1$$

即 A^{-1} 是一系列初等矩阵的乘积. 具体做法是把下列 $n \times 2n$ 矩阵，进行行的初等变换

$$(A,E) \longrightarrow (E,A^{-1})$$

当 A 化为单位矩阵 E 时，E 必化为 A 的逆矩阵 A^{-1}.

同样，只进行列的初等变换，得到

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

注意 可逆矩阵，又称为**非退化矩阵**或**满秩矩阵**. 不可逆矩阵又称为**退化矩阵**或**非满秩矩阵**.

七、分块矩阵

1. 用几条纵线与横线把一个矩阵 A 分成若干小块，每一小块称为原矩阵的**子块阵**. 将所得的子块阵作为元素，就得到 A 的一个**分块矩阵**. 每一个分块的方法叫做 A 的**一个分法**.

2. 分块矩阵的加法：$A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{m\times n}$，用同样的分法将 A,B 分块，得 $A = (A_{\alpha\beta})_{s\times t}$，$B = (B_{\alpha\beta})_{s\times t}$，那么 $A + B$ 等于相应的同型子块阵相加，即

$$A + B = (A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta})_{s\times t}$$

3. 分块阵的数乘法：设 $A_{\alpha\beta}$ 是 A 的子块阵

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = (A_{\alpha\beta})_{s\times t}$$

那么

$$kA = (ka_{ij})_{m\times n} = (kA_{\alpha\beta})_{s\times t}$$

也就是说，kA 是由子块阵 $kA_{\alpha\beta}$ 为元素的分块矩阵.

4. 分块矩阵的乘法：

设分块矩阵　$A = (A_{\alpha\beta})_{s\times t}$，　$B = (B_{\beta\gamma})_{t\times l}$

则　　$AB = (C_{\alpha\gamma})_{s\times l}$

其中 $C_{\alpha\gamma}$ 为乘积矩阵的子块阵，并且

$$C_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{t} A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}$$

其中 $A_{\alpha\beta}$ 的列数与 $B_{\beta\gamma}$ 的行数相等.

5. 分块矩阵求逆矩阵：

(1) 设 A 为对角块矩阵

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & 0 \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{ll} \end{bmatrix}$$

其中 $A_{ii}(i = 1,2,\cdots,l)$ 均为可逆方阵，则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & 0 \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{ll}^{-1} \end{bmatrix}$$

(2) 设 A 为三角块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

其中 B 为 $m \times m$ 可逆矩阵,C 为 $n \times n$ 可逆矩阵,则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

若

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & C \end{bmatrix}$$

则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

应用举例

一、与已知矩阵可交换的矩阵

例 1 已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求与 A 可交换的一切矩阵.

解 设

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

并且 $AB = BA$. 把 A,B 代入等式,并乘开以后,根据矩阵相等的规定,得到

$$\begin{cases} b_{11} + b_{21} = b_{11} \\ b_{12} + b_{22} = b_{11} + b_{12} \\ b_{21} = b_{21} \\ b_{22} = b_{21} + b_{22} \end{cases}$$

解得 $b_{21} = 0, b_{11} = b_{22}, b_{12}$ 为任意数. 由此得到与 A 可交换的任一矩阵是

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{bmatrix}$$

例 2 设分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1E_1 & & & 0\\ & \lambda_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_kE_k\end{bmatrix}$$

其中 E_j 是 $n_j(j=1,2,\cdots,k)$ 阶单位阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 k 个不同的数. 求与 A 相乘可交换的所有矩阵.

解 设 X 是与 A 相乘可交换的矩阵，则 X 必与 A 同阶. 令

$$X=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk}\end{bmatrix}$$

其中 A_{ij} 是 $n_i\times n_j$ 矩阵$(i,j=1,2,\cdots k)$，则

$$AX=\begin{bmatrix}\lambda_1A_{11} & \lambda_1A_{12} & \cdots & \lambda_1A_{1k}\\ \lambda_2A_{21} & \lambda_2A_{22} & \cdots & \lambda_2A_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_kA_{k1} & \lambda_kA_{k2} & \cdots & \lambda_kA_{kk}\end{bmatrix},$$

$$XA=\begin{bmatrix}\lambda_1A_{11} & \lambda_2A_{12} & \cdots & \lambda_kA_{1k}\\ \lambda_1A_{21} & \lambda_2A_{22} & \cdots & \lambda_kA_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1A_{k1} & \lambda_2A_{k2} & \cdots & \lambda_kA_{kk}\end{bmatrix}$$

由 $AX=XA$ 得各相应子块对应相等. AX 的 (i,j) 块是 λ_iA_{ij}，XA 的 (i,j) 块是 λ_jA_{ij}，因此 $\lambda_iA_{ij}=\lambda_jA_{ij}$. 但当 $i\neq j$ 时，$\lambda_i\neq\lambda_j$，所以 $A_{ij}=0$. 于是

$$X=\begin{bmatrix}A_{11} & & & 0\\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{kk}\end{bmatrix}$$

即与 A 相乘可交换的矩阵是准对角阵.

二、矩阵的幂

例 3 已知

$$A=\begin{bmatrix}3 & -10 & -6\\ 1 & -4 & -3\\ -1 & 5 & 4\end{bmatrix}$$

求 A^{100}.

解 容易计算得到

$$A^2=\begin{bmatrix}5 & -20 & -12\\ 2 & -9 & -6\\ -2 & 10 & 7\end{bmatrix}$$

比较、观察、分析 A 与 A^2 后，我们可以猜想

$$A^n=\begin{bmatrix}1+2n & -10n & -6n\\ n & -5n+1 & -3n\\ -n & 5n & 3n+1\end{bmatrix}$$

下面我们用数学归纳法证明.

当$n=1$时，结论成立. 假设当$n=k$时，结论成立，则当$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}A^{k+1}&=A^k\cdot A\\ &=\begin{bmatrix}1+2k & -10k & -6k\\ k & -5k+1 & -3k\\ -k & 5k & 3k+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -10 & -6\\ 1 & -4 & -3\\ -1 & 5 & 4\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1+2(k+1) & -10(k+1) & -6(k+1)\\ k+1 & -5(k+1)+1 & -3(k+1)\\ -(k+1) & 5(k+1) & 3(k+1)+1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以，$n=k+1$时，结论成立. 从而对一切自然数n，结论成立. 于是

$$A^{100}=\begin{bmatrix}201 & -1000 & -600\\ 100 & -499 & -300\\ -100 & 500 & 301\end{bmatrix}$$

例 4 设

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

计算 A^6.

解 经计算知

$$A^2=\begin{bmatrix}4&-4&-4&4\\-4&4&4&-4\\-4&4&4&-4\\4&-4&-4&4\end{bmatrix}=-4A$$

所以

$$\begin{aligned}A^6&=(A^2)^3=(-4A)^3=-64A^3=-64A^2\cdot A=-64(-4A)A\\&=256A^2=256(-4A)=-1024A.\end{aligned}$$

例 5 求 $\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}^n$

解 记

$$P=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

易见 $P^2=E$，E 为单位矩阵. 于是

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}^n&=(aE+bP)^n=a^nE+na^{n-1}bP+C_n^2a^{n-2}b^2P^2\\&\quad+C_n^3a^{n-3}b^3P^3+\cdots+b^nP^n\\&=(a^n+C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^4a^{n-4}b^4+\cdots)E\\&\quad+(C_n^1a^{n-1}b+C_n^3a^{n-3}b^3+\cdots)P\\&=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}E+\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}P\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(a+b)^n+(a-b)^n&(a+b)^n-(a-b)^n\\(a+b)^n-(a-b)^n&(a+b)^n+(a-b)^n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

三、逆矩阵的求法及其应用

常用的求逆矩阵的方法有初等变换，利用有关公式及矩阵分块等方法．但也要根据题目的具体情况，采用适当的方法才能较快地、准确地解决问题．

例 6　求下列各矩阵的逆($n > 1$)：

$$(1)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\qquad (2)\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

解　(1) 用 A 表示所给方阵，将(A,E) 的第 $2,3,\cdots,n$ 行都加到第 1 行，然后第 1 行乘以$\dfrac{1}{n-1}$，再将第 1 行乘以 -1 加到其余各行，最后将第 $2,3,\cdots,n$ 行均乘以 -1，把 A 变成单位阵．与此同时，(A,E) 中的 E 变为

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n \end{bmatrix}$$

(2) 用 A 表示所给方阵，将(A,E) 的第 n 行依次与第$n-1$行，$n-2$行，$\cdots$，1行交换，然后用$a_n^{-1},a_1^{-1},\cdots,a_{n-1}^{-1}$分别乘第$1,2,\cdots,n$行，把 A 变成单位阵，与此同时，(A,E) 中的 E 变成

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

注意 用分块矩阵求解此题更简单:把 A 分为四块

$$A=\begin{bmatrix}0 & A_1\\ a_n & 0\end{bmatrix},\ 其中\ A_1=\begin{bmatrix}a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{n-1}\end{bmatrix}$$

由于 a_n 的逆元素是 a_n^{-1},而

$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix}a_1^{-1} & & & 0\\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{n-1}^{-1}\end{bmatrix}$$

易知

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & a_n^{-1}\\ A_1^{-1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1}\\ a_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0\end{bmatrix}$$

例 7 设 A 为 n 阶复方阵,且

$$A^3=2E,\quad B=A^2-2A+2E$$

试证 B 是可逆矩阵,并求 B^{-1}。

证明 因为 $A^3=2E$,所以

$B=A^2-2A+2E=A^3+A^2-2A=A(A^2+A-2E)=A(A+2E)(A-E)$. 以下分别证明上式右端三个因子的行列式都不等于零,从而得证 $|B|\neq 0$,由 $A^3=2E$ 知,$|A^3|=|A|^3=|2E|\neq 0$. 所以 $|A|\neq 0$. 再由 $A^3=2E$ 知,

$$10E=2E+8E=A^3+8E^3=A^3+(2E)^3=(A+2E)(A^2-2A+4E)$$

两边取行列式得

$$|10E|=|A+2E||A^2-2A+4E|$$

于是 $|A+2E|\neq 0$. 又 $E=A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)$, $|E|=|A-E||A^2+A+E|$,所以 $|A-E|\neq 0$. 从而 $|B|\neq 0$.

我们下一步求 B^{-1}. 只须求出 A^{-1},$(A+2E)^{-1}$,$(A-E)^{-1}$ 即可.

因为$\frac{1}{2}A^3=E$，所以$A^{-1}=\frac{1}{2}A^2$. 由$10E=(A+2E)(A^2-2A+4E)$及$E=(A-E)(A^2+A+E)$知

$$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4E)$$

$$(A-E)^{-1}=A^2+A+E$$

所以 $B^{-1}=(A-E)^{-1}(A+2E)^{-1}A^{-1}=(A^2+A+E)$

$$\cdot\frac{1}{10}(A^2-2A+4E)\cdot\frac{1}{2}A^2=\frac{1}{10}(A^2+3A+4E).$$

例8 若A,B是n阶矩阵，且$E+AB$有逆，则$E+BA$也有逆，且

$$(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A.$$

证明 因为

$$\begin{aligned}
&(E+BA)[E-B(E+AB)^{-1}A]\\
&=E-B(E+AB)^{-1}A+BA-BAB(E+AB)^{-1}A\\
&=E-B[(E+AB)^{-1}-E+AB(E+AB)^{-1}]A\\
&=E-B[-E+(E+AB)(E+AB)^{-1}]A\\
&=E-B(-E+E)A=E.
\end{aligned}$$

所以，$|E+BA|\neq 0$. 所以，$E+BA$也有逆，且

$$(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A.$$

例9 设a,b,c,d是四个数，证明：

$$a^2+b^2=1,c^2+d^2=1,ac+bd=0 \tag{5}$$

成立的充分必要条件是

$$a^2+c^2=1,b^2+d^2=1,ab+cd=0 \tag{6}$$

证明 （此例应用逆矩阵的理论来证明.）若(5)成立，用a,b,c,d作二阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

A与它的转置矩阵A'作乘法，得

$$AA' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，$|A| \neq 0$，A^{-1}存在. 易知$A' = A^{-1}$，即A'是A的逆方阵. 从而

$$A'A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是$a^2+c^2=1$，$b^2+d^2=1$，$ab+cd=0$，即(6)成立. 反之，当(6)成立时，把上述证明过程倒推上去，即得(5)也成立.

例10 设n阶非奇异矩阵A中每行元素之和都等于常数c. 证明：$c \neq 0$，且A^{-1}中每行元素之和都等于c^{-1}.

证法一 将$|A|$中各列都加到第i列后从第i列中提出c，再按第i列展开，得

$$|A| = c(A_{1i} + A_{2i} + \cdots + A_{ni})$$

由于$|A| \neq 0$，故$c \neq 0$. 所以，由上式可得

$$\frac{A_{1i}}{|A|} + \frac{A_{2i}}{|A|} + \cdots + \frac{A_{ni}}{|A|} = c^{-1} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

即A^{-1}的每行中诸元素的和为c^{-1}.

证法二 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$A^{-1} = (c_{ij})_{n\times n}$，则$A'(A^{-1})'$的第$i$行第$j$列的元素$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}c_{jk}$，其中$c_{jk}$是$A^{-1}$中第$j$行第$k$列的元素. 因为$A'(A^{-1})'$的第$j$列的元素之和为1，即

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}c_{jk} = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}) = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}c = 1$$

所以$c \neq 0$，且

$$\sum_{k=1}^{n} c_{jk} = c^{-1} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

此即说明A^{-1}的各行元素之和为c^{-1}.

证法三　已知

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\c\\\vdots\\c\end{bmatrix}$$

因 A 是非奇异矩阵,故 A 是可逆矩阵.两边左乘以 A^{-1},得

$$A^{-1}\begin{bmatrix}c\\c\\\vdots\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\text{, 从而 } c\neq 0\text{,且 } A^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c^{-1}\\c^{-1}\\\vdots\\c^{-1}\end{bmatrix}$$

证法四　如果 $c=0$,那么 A 的列向量组线性相关,从而 $|A|=0$,与题设矛盾.所以 $c\neq 0$,由题设有

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

两端用 $c^{-1}A^{-1}$ 左乘,得

$$c^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

这就表明 A^{-1} 的每行元素之和是 c^{-1}.

此证法用到的线性相关、无关的概念,请参看第三章.

例 11　设 A,B 都是 n 阶正交矩阵,且 $|A|=-|B|$.证明:$|A+B|=0$.

证明　因为 A,B 都是正交矩阵,所以 $|A|=\pm 1,|B|=\pm 1$.由 $|A|=-|B|$ 知,A,B 的行列式有以下两种可能:

(1) $|A|=1,\quad |B|=-1$.

因为

$$|A^{-1}(A+B)B^{-1}| = |B^{-1}+A^{-1}| = |B'+A'|$$
$$= |(B+A)'| = |B+A|$$

$$|A^{-1}(A+B)B^{-1}| = |A^{-1}|\cdot|A+B|\cdot|B^{-1}| = -|A+B|$$

所以
$$-|A+B| = |A+B|$$

从而
$$|A+B| = 0$$

(2) $|A| = -1$, $|B| = 1$, 证明方法同(1).

四、其它

例 12 证明:任一 n 阶方阵 A 都可以表为 $A=B+C$,其中 B 是对称矩阵.而 C 是反对称矩阵.

证明 因为 $A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')$,而 $(A+A')'=A'+(A')'=A'+A=A+A'$,所以,$A+A'$ 是对称矩阵,$\frac{1}{2}(A+A')$ 当然也是.

又 $(A-A')'=A'-(A')'=A'-A=-(A-A')$,所以,$A-A'$ 是反对称矩阵.$\frac{1}{2}(A-A')$ 亦是.

令 $B=\frac{1}{2}(A+A')$,$C=\frac{1}{2}(A-A')$,则任一 n 阶方阵 A 都可以表为 $A=B+C$,其中,B 是对称矩阵,C 是反对称矩阵.证毕.

例 13 证明:对任意 n 阶矩阵 A,B 恒有

$$AB-BA\neq E_n$$

证明 用反证法.假定 $AB-BA=E_n$ 成立,那么左边矩阵主对角元素之和与右边矩阵主对角元素之和应相等,并且都等于 n.但

$$\text{左边主对角元素之和} = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}-\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}$$

对其中一项的 i,k 交换使用，即知上式 $=0$. 这就推出矛盾. 所以，原结论正确. 证毕.

例 14 设 $S=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ K & E_s\end{bmatrix}$， $T=\begin{bmatrix}E_r & K\\ 0 & E_s\end{bmatrix}$

都是 $n=r+s$ 阶矩阵，而

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}$$

是一个 n 阶矩阵，并且与 S,T 有相同的分法，求 SA,AS,TA 和 AT.

解 按照分块矩阵的乘法，计算后得到

$$SA=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ K & E_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ KA_1+A_3 & KA_2+A4\end{bmatrix}$$

$$AS=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_r & 0\\ K & E_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1+A_4K & A_2\\ A_3+A_4K & A_4\end{bmatrix}$$

$$TA=\begin{bmatrix}E_r & K\\ 0 & E_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^1 & A^2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1+KA_3 & A_2+KA_4\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}$$

$$AT=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_r & K\\ 0 & E_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & A_1K+A_2\\ A_3 & A_3K+A_4\end{bmatrix}$$

由上面的计算结果，我们可以得到如下的结论：当一个分块矩阵左（右）乘一个与其有相同分法的初等分块矩阵时，就相当于对该分块矩阵施行第三种行（列）的初等变换，即进行行（列）的消法变换.

习　题

1. 计算下列各排列的逆序数：

(1)　135298746；

(2)　$n,n-1,\cdots,2,1$；

(3)　987654321.

2. 已知 n 个数码的排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数是 r，那么排列 $i_n,i_{n-1},\cdots,i_2,i_1$ 的逆序数是多少？

3. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

4. 计算以下行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$

5. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

6. 设在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，$a_{ij} = -a_{ji}, i,j = 1,2,\cdots,n$. 证明：当 n 是奇数时，$D = 0$.

7. 计算下列 n 阶行列式

(1) $$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

8. 设 x 为任意实数，证明行列式

$$\begin{vmatrix} x - 2 & x \\ 2x - 3 & x - 7 \end{vmatrix}$$

的值不大于 23.

9. 已知行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明奇偶排列各半.

10. 计算 $f(x+1) - f(x)$，其中

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}$$

11. 计算下列矩阵的乘积：

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^4$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$

(4) 计算$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n$，并利用这个结果计算

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^4$$

12. 设 $AB = BA, AC = CA$，证明：A,B,C 都是同阶矩阵，而且

$$A(B+C) = (B+C)A,\quad A(BC) = (BC)A$$

13. 求所有与下列矩阵 A 可交换的矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

14. 设 A 是一个实对称矩阵，且 $A^2 = 0$，证明：$A = 0$.

15. 设 A 是一个 n 阶矩阵，并且存在一个正整数 m，使得 $A^m = 0$，证明：$E - A$ 可逆，且$(E-A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{m-1}$.

16. 设 A,B 为任意两个 n 阶方阵，证明：

$$(AB)^* = B^* A^*$$

注：A^* 为 A 的伴随矩阵.

17. 求 A^{-1}，设

(1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$(ad - bc = 1)$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

18. 设 A 是一个 m 阶可逆矩阵，B 是一个 n 阶可逆矩阵，又 C 是一个 $n \times m$ 矩阵，证明：矩阵

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$$

是可逆矩阵，并求出其逆矩阵.

19. 设矩阵 A 的元素均为整数，证明：A^{-1} 的元素均为整数的充要条件是 $|A| = \pm 1$.

20. 设 A 为 n 阶方阵，证明：$|A^*| = |A|^{n-1}$.

第三章 矩阵的秩与线性方程组

§1 矩阵的秩

基本概念与结论

所谓数域 P 上一个 n **维向量**就是由数域 P 中 n 个数组成的有序数组

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

其中 a_i 称为向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的**第 i 个分量**.

关于 n 维向量的相等及其运算等概念可参阅高等代数教材. 这里着重讨论向量组的线性相关性、向量组的极大无关组及矩阵的秩.

一、向量组的线性相关性

1. 向量组的线性组合

向量 α 称为向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的一个**线性组合**，如果存在数域 P 中的数 $k_1,k_2,\cdots k_s$，使

$$\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s$$

当向量 α 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的一个线性组合时，我们也说 α 可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ **线性表示**.

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 中每一个向量 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$ 都可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 就称为可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ **线性表示**.

2. 向量组的线性相关与线性无关

(1)如果在数域 P 中存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s=0$$

那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 1)$称为**线性相关**的.

一个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时才有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$,则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是**线性无关**的.

(2)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$线性相关的充分必要条件是其中有一个向量可以经其余向量线性表示.

因为零向量可以被任一个向量组线性表示,所以任意一个含有零向量的向量组必线性相关.

(3)向量组中有两个向量成比例必线性相关.

(4)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(\alpha_1\neq 0,r>1)$线性无关的充分必要条件是每一个 $\alpha_i(1<i\leqslant r)$都不能表为它前面 i-1 个向量的线性组合.

(5)设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\in P^n,\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_in,b_{i1},\cdots,b_{ip})\in P^{n+p}(i=1,2,\cdots,m)$。如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,那么 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性无关.反之,如果 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关,那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 不一定线性无关.

(6)向量组 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,n)$线性无关的充要条件是
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

3. 向量组的等价

(1)若两个向量组相互可以线性表示,则称这两个向量组等价.

(2)向量组之间的等价关系满足反身性、对称性和传递性.

(3)**替换定理** 设向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \qquad ①$$

线性无关,并且每一 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant r)$都可以由向量组

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s \quad ②$$

线性表示，则

(i) $r \leqslant s$;

(ii) 适当调整②中向量的顺序，使得用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 替换 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 后，所得的向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \cdots, \beta_s$$

与②等价.

特别地，当 $r=s$ 时，①与②等价.

二、向量组的极大无关组与秩

1. 向量组的极大无关组

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的一个部分向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 叫做一个**极大无关部分组**(简称**极大无关组**)，如果

(i) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关；

(ii) 每一个 $\alpha_j (j=1,2,\cdots,n)$ 都可以由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示.

每一个不全为零的向量组成的向量组都有极大无关组，而且极大无关组不唯一.

(2) 一个向量组与它的任一极大无关组等价.

(3) 等价的向量组的极大无关组含有相同个数的向量. 特别，一个向量组的任意两个极大无关组含有相同个数的向量.

(4) 一个向量组中任何一个线性无关组都可以扩充为一个极大无关组.

(5) 如果向量组的一个极大无关组含有 p 个向量，那么这个向量组的任意 p 个线性无关的向量构成该向量组的一个极大无关组.

(6) 任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

2. 向量组的秩

(1) 向量组的极大无关组所含向量的个数称为这个向量组的**秩**.

(2)一个向量组线性无关的充分必要条件是它所含向量的个数与它的秩相同.

(3)等价的向量组必有相同的秩.

(4)如果向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示,那么组(Ⅰ)的秩不大于组(Ⅱ)的秩.

三、矩阵的秩

1. 矩阵的每一行(列)都可以看成一个向量,矩阵的行(列)向量组的秩称为**矩阵的行(列)秩**,矩阵的行秩等于列秩,统称为**矩阵的秩**. 显然有秩 $A'=$秩 A.

2. 秩为 r 的 $n\times r$ 矩阵称为**列满秩阵**;秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵称为**行满秩阵**.

3. 矩阵的秩有以下性质:

(1)矩阵 A 的秩是 $r(\neq 0)$ 的充分必要条件是 A 中有一个 r 阶子式不为零,同时,所有 $r+1$ 阶子式全为零.

(2)n 阶矩阵 A 的秩小于 n 的充分必要条件是 A 的行列式为零.

(3)矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

(4)设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,则必存在 m 阶非退化矩阵 P 与 n 阶非退化矩阵 Q 使

$$PAQ=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ③$$

其中 E_r 是 r 阶单位阵. ③称为矩阵 A 的**等价标准形**.

(5)秩$(AB)\leqslant\min$(秩 A,秩 B). 当 A 可逆时,秩$(AB)=$秩 B.

应用举例

一、向量组的线性相关性

例 1 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,证明:向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关。推广到 m 个$(m\geqslant 3)$向量,结论如何?

分析　证明向量组线性无关，有两种基本证法：第一种，按定义，要证 $\alpha_1,\alpha_.\cdots,\alpha_n$ 线性无关，只须证明：由 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_n\alpha_n=0$ 可以推出 $k_1=k_2=\cdots k_n=0$；第二种就是反证法.

证法一　设 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$. 展开整理，得 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$. 由题设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

$$\begin{aligned}k_1+k_3&=0,\\ k_1+k_2&=0,\\ k_2+k_3&=0\end{aligned}\tag{1}$$

因为齐次线性方程组(1)的系数行列式 $D\neq0$，所以(1)只有零解，即 $k_1=k_2=k_3=0$. 所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

证法二(反证法)　假设 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 l_1,l_2,l_3，使

$$l_1(\alpha_1+\alpha_2)+l_2(\alpha_2+\alpha_3)+l_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

展开整理，得

$$(l_1+l_3)\alpha_1+(l_1+l_2)\alpha_2+(l_2+l_3)\alpha_3=0$$

由 l_1,l_2,l_3 不全为零，易证 l_1+l_3,l_1+l_2,l_2+l_3 也不全为零. 这就与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关矛盾，所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

推广　令 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_{m-1}(\alpha_{m-1}+\alpha_m)+k_m(\alpha_m+\alpha_1)=0$，展开整理，得

$$\begin{cases}k_1 & & & +k_m=0,\\ k_1+k_2 & & & =0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ & & k_{m-1} & +k_m=0\end{cases}$$

这个方程组系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{m+1}=\begin{cases}2, & m\text{ 是奇数},\\0, & m\text{ 是偶数}.\end{cases}$$

所以当 m 是奇数时，方程组只有零解，因而 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}+\alpha_m,\alpha_m+\alpha_1$ 线性无关；当 m 是偶数时，方程组有非零解，因而 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}+\alpha_m,\alpha_m+\alpha_1$ 线性相关.

例 2 判断 n 维向量组 $\alpha_1=(1,2,2,\cdots,2),\alpha_2=(2,2,2,\cdots,2),\alpha_3=(2,2,3,2,\cdots,2),\cdots,\alpha_n=(2,2,,2\cdots,n)$的线性相关性，

分析 这是由 n 个向量构成的 n 维向量组，由基本结论知，它们的线性相关性取决于由这些向量的分量所构成的行列式的值是否为零. 若行列式的值不为零，则线性无关. 否则线性相关.

解 当 $n>2$ 时，这些向量的分量构成的行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&-2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&n-3&2-n\\2&2&2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}0&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-3&2-n\\2&2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}2(-1)(-2)\cdots(2-n)=-2(n-2)!\neq 0$$

所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

当 $n=1$ 时，$\alpha_1(\neq 0)$ 线性无关. 当 $n=2$ 时，α_1,α_2 的对应分量不成比例，所以线性无关. 因此，对任意自然数 n，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

例 3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为两个 n 维向量组，且

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

若 $D=|a_{ij}|\neq 0$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示，并且若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也线性无关.

证明 由于 $D\neq 0$，可设法将 α_i 用 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示出来.

用 $A_{1i},A_{2i},\cdots,A_{ni}$ 依次乘(2)式中第 $1,2,\cdots,n$ 个等式两端再相加. 得

$$\alpha_i=\frac{A_{1i}}{D}\beta_1+\frac{A_{2i}}{D}\beta_2+\cdots+\frac{A_{ni}}{D}\beta_n \quad (i=1,2,,\cdots,n)$$

可见，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示. 因此向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价，由替换定理知，它们的极大无关组含有相同个数的向量. 于是若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也线性无关.

例 4 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，任取数域 P 中 $r-1$ 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_{r-1}$，证明：向量组

$$\beta_1,=\alpha_1,\beta_2=k_1\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_{r-1}=k_{r-2}\alpha_1+\alpha_{r-1},\beta_r=k_{r-1}\alpha_1+\alpha_r$$

线性无关.

证法一 令 $l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{r-1}\beta_{r-1}+l_r\beta_r=0$，由此得 $l_1\alpha_1+l_2(k_1\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+l_{r-1}(k_{r-2}\alpha_1+\alpha_{r-1})+l_r(k_{r-1}\alpha_1+\alpha_r)=0$. 也就是 $(l_1+l_2k_1+\cdots+l_{r-1}k_{r-2}+l_rk_{r-1})\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{r-1}\alpha_{r-1}+l_r\alpha_r=0$. 因为 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots\alpha_r$ 线性无关，所以 $l_1+l_2k_1+\cdots+l_{r-1}k_{r-2}+l_rk_{r-1}=0$，$l_2=\cdots=l_{r-1}=l_r=0$. 从而有 $l_1=0$. 故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r-1},\beta_r$ 线性无关.

证法二 由题设条件知，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示. 另方面有，$\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2-k_1\beta_1$，$\cdots$，$\alpha_{r-1}=$

$\beta_{r-1}-k_{r-2}\beta_1,\alpha_r=\beta_r-k_{r-1}\alpha_1$,所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 等价。又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,故由替换定理知,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也线性无关.

证法三 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{r-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ k_{r-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

由例 3 知,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

例 5 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\beta,\gamma$ 线性相关,证明:若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 不等价,则 β 与 γ 中有且仅有一个可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

证明 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta,\gamma$ 线性相关,所以存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,l_1,l_2$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+l_1\beta+l_2\gamma=0$. 由于 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性无关,因此 l_1,l_2 至少有一个不为零. 又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 不等价,所以 l_1,l_2 必有一个为零. 设 $l_1\neq 0,l_2=0$,则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

再证,β 与 γ 只有一个可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示. 如果 β,γ 都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示,设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,\gamma=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$,易见,$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 等价,与题设不等价矛盾.

例 6 在 R^n 中,向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \qquad ①$$

线性无关,且①中每个向量可由向量组

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \qquad ②$$

线性表出. 证明:

(1)向量组②中存在向量 $\beta_{i_1}(1\leqslant i_1\leqslant s)$使向量组

$$\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_{i_1} \quad ③$$

线性无关.

(2)如果②也线性无关,且 $m<s$ 那么还可以在②中找到 $s-m$ 个向量 $\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_{s-m+1}}$使向量组

$$\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_{s-m+1}} \quad ④$$

仍线性无关.

分析 要在②中选一个向量 β_{i_1}与 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成一个线性无关的向量组,可先考察把②的全部向量添加于 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ 所构成的向量组与②的关系.

证明 (1)作向量组

$$\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \quad ⑤$$

设组②的秩为 t,显然组⑤与组②等价. 所以组⑤的秩为 t. 又由题设条件知,组①可由组②线性表示,所以 $m\leqslant t$. 因为任一线性无关的向量组都可以扩充为极大线性无关组,所以在⑤中由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 出发一定存在 β_{i_1}使 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_{i_1}$仍线性无关.

(2)如果②也线性无关,那么组⑤与组②的秩都等于 s. 又题设 $m<s$,于是,上述 m 个线性无关的向量 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_{i_1}$可扩充为⑤的一个极大无关组. 也就是说,存在 $s-m$ 个向量 $\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_{s-m+1}}$使 $\alpha_2,,\cdots\alpha_m,\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_{s-m+1}}$构成⑤的一个极大无关组. 这就证得④线性无关.

二、向量组的极大无关组的求法

求向量组的极大无关组常用的方法有逐步添加法与矩阵的初等变换法。下面的例 7 给出了用矩阵的初等变换求向量组的极大无关组的理论根据.

例 7 设矩阵 $A=(a_{ij})$经过行的初等变换得到矩阵 B,那么 A 与 B 的列向量组有完全相同的线性关系. 即,如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与

$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$ 分别是 A 与 B 的列向量组，那么 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 的充分必要条件是 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=0$.

证明 假定对矩阵 A 施行第三种行初等变换得到 B. 设

$$A=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{matrix}$$

A 的列向量组记为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$.

将 A 的第 j 行乘以 t 加到第 i 行上去，得

$$B=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ta_{j1} & a_{i2}+ta_{j2} & \cdots & a_{im}+ta_{jm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & & \cdots & a_{jm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{matrix}$$

B的列向量组记为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$.

若 A 的列向量组有线性关系

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0 \tag{3}$$

(3)等价于以下等式组

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1a_{i1}+k_2a_{i2}+\cdots+k_ma_{im}=0 & (i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1a_{j1}+k_2a_{j2}+\cdots+k_ma_{jm}=0 & (j) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{4}$$

将第 j 个等式乘以 t 再加到第 i 个等式上去，得

$$
\begin{cases}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_1(a_{i1}+ta_{j1})+\cdots+k_m(a_{im}+ta_{jm})=0 \quad (i) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_1a_{j1}+\cdots \qquad\qquad +k_ma_{jm}=0 \qquad (j) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases} \tag{5}
$$

把(5)写成向量的形式,得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=0 \tag{6}$$

因此满足(3)的 k_i 必满足(6). 反过来,满足(6)的 k_i 也必满足(3).

若对 A 施行第一、二种行初等变换得到 B,证明与上述类似.

例 8 设 $\alpha_1=(1,0,3,4,3)$, $\alpha_2=(3,-1,2,1,3)$,

$\alpha_3=(-1,1,0,5,2)$, $\alpha_4=(3,0,5,10,8)$, $\alpha_5=(-1,0,1,-2,-2)$,

求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组及秩.

解 解法一 容易看出 α_1,α_2 线性无关. 添加 α_3,看向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,的线性关系,因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 添加 α_4 于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,考察 α_4 是否能由 α_1, α_2,α_3 线性表示,令 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$,展开得

$$
\begin{cases}
k_1+3k_2-k_3=3 \\
-k_2+k_3=0 \\
3k_1+2k_2=5 \\
4k_1+k_2+5k_3=10 \\
3k_1+3k_2+2k_3=8
\end{cases}
$$

解这个方程组得 $k_1=k_2=k_3=1$. 所以 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

同理可得 $\alpha_5=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是极大无关组. 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=3$.

解法二 以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$ 为列作矩阵 A. 对 A 施行行初等变

换，得

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-1&3&-1\\0&-1&1&0&0\\3&2&0&5&1\\4&1&5&10&-2\\3&3&2&8&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1&3&-1\\0&-1&1&0&0\\0&-7&3&-4&4\\0&-11&9&-2&2\\0&-6&5&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&3&-1\\0&-1&1&0&0\\0&-4&0&-4&4\\0&-2&0&-2&2\\0&-1&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&0&1&1&-1\\0&1&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

易见，矩阵 B 的列向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关，且 $\beta_4=\beta_1+\beta_2+\beta_3$，$\beta_5=\beta_1-\beta_2-\beta_3$. 由例 7 知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_5=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$. 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是原向量组的极大无关组，且秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=3$.

注意 必须对 A 的行施行初等变换才能保证 A 的列向量组与 B 的列向量组有相同的线性关系.

例 9 设有向量组 $\beta_1=(a,b,b,\cdots,b,b)$. $\beta_2=(b,a,b,\cdots,b,b)$，$\cdots$，$\beta_{n-1}=(b,b,b,\cdots,a,b)$，$\beta_n=(b,b,b,\cdots,b,a)$满足条件 $a+(n-1)b=0$，试决定其中线性无关向量的个数.

解 这是一个用字母表示的向量组，分两种情况讨论如下.

(1)$a=0$. 这时 $b=0$，所有向量都是零向量，故线性无关向量个数为 0.

(2)$a\neq0$. 由 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=0$ 知 $\beta_n=-\beta_1-\beta_2-\cdots-\beta_{n-1}$. 故 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 中，线性无关向量个数小于或等于 $n-1$. 由 $a\neq0$，$a+(n-1)b=0$ 知 $b\neq0$，$b\neq a$. 设 $k_1(a,b,\cdots,b,b)+k_2(b,a,\cdots,b,b)+\cdots+k_{n-1}(b,b,\cdots,a,b)=0$. 比较左右两端最后一个分量知 $k_1+k_2+\cdots+$

$k_{n-1}=0$. 又由第 i 个分量知 $k_i a+(\sum_{j=1}^{n-1} k_j - k_i)b=k_i(a-b)=0$. 但 $a-b\neq 0$,所以 $k_i=0(i=1,2,\cdots,n-1)$. 这就证明了 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1}$线性无关. 因此上述向量组有 $n-1$ 个线性无关的向量,且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1}$就是该向量组的极大无关组.

三、矩阵秩的计算与证明

例 10 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&5&7\\1&2&3&7&10\\1&3&4&9&13\\1&4&5&11&16\end{pmatrix}$$

求 A 的秩.

解法一 对 A 施行初等变换,得

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&5&7\\1&2&3&7&10\\1&3&4&9&13\\1&4&5&11&16\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3,4]{[i+1(-1)]}\begin{pmatrix}1&1&2&5&7\\0&1&1&2&3\\0&2&2&4&6\\0&3&3&6&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[4+2(-3)]}]{[3+2(-2)]}\begin{pmatrix}1&1&2&5&7\\0&1&1&2&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

显然秩 $B=2$. 因此,秩 $A=2$.

解法二 A 有一个二阶子式 $D=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\neq 0$,所有包含 D 的三阶子式

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&3&4\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&1&5\\1&2&7\\1&3&9\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&1&7\\1&2&10\\1&3&13\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&4&5\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}1&1&5\\1&2&7\\1&4&11\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}1&1&7\\1&2&10\\1&4&16\end{vmatrix}=0.$$

所以，秩 $A=2$.

解法三 由解法一知，A 通过初等变换得

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&2&5&7\\0&1&1&2&3\\0&2&2&4&6\\0&3&3&6&9\end{pmatrix}$$

A_1 有一个二阶子式 $D=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\neq0$. 由行列式性质知，所有包含 D 的三阶子式都为零. 所以，秩 $A=$ 秩 $A_1=2$.

说明 解法一是求数字矩阵秩的常用方法. 解法二计算量较大. 通常将两种方法相结合，即用解法三.

例 11 求 n 阶矩阵($n>1$)

$$A=\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a\\a&1&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$$

的秩.

分析 这是含有参数的矩阵，在解的过程中要注意对参数进行讨论.

解 各行加到第一行，得

$$A\rightarrow\begin{pmatrix}1+(n-1)a&1+(n-1)a&\cdots&1+(n-1)a\\a&1&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$$

当 $1+(n-1)a\neq0$ 即 $a\neq-\dfrac{1}{n-1}$ 时，用 $\dfrac{1}{1+(n-1)a}$ 乘第一行，然后

各行减去第一行的 a 倍，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix}$$

(1)当 $a \neq -\frac{1}{n-1}$，且 $a \neq 1$ 时，$|A| \neq 0$，秩 $A=n$.

(2)当 $a=-\frac{1}{n-1}$时，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ -\frac{1}{n-1} & 1 & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$|A|=0$，有一个 $n-1$ 阶子式

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ -\frac{1}{n-1} & 1 & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1-\frac{n-2}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-2} \neq 0$$

所以，秩 $A=n-1$.

(3)当 $a=1$ 时，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

所以，秩 $A=1$.

例 12 λ,μ 取何值时，

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 2 & -3 & 2\\ \lambda^2 & -3 & 2 & 1 & -1\\ \lambda^3 & -1 & 2 & -1 & \mu\end{pmatrix}$$

的秩是一个偶数？

分析 因为矩阵 A 有一个二阶子式不等于零，所以问题归结为 λ,μ 取何值时，A 的所有三阶子行列式为零. 此时秩 $A=2$. 为此，首先确定参数的取值范围.

解 令行列式

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & \mu\end{vmatrix}=0,\quad \text{解得 } \mu=\frac{1}{2}.$$

再令行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 2\\ \lambda^2 & -3 & 2\\ \lambda^3 & -1 & 2\end{vmatrix}=0,$$

解得 $\lambda=0$ 或 1 或 $-\frac{1}{2}$.

当 $\lambda=0,\mu=\frac{1}{2}$ 时，

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & -3 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 8 & -8 & 5\\ 0 & 0 & 4 & -4 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 8 & -8 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以,秩 $A=2$.

类似地,可以验证当 $\lambda=1,\mu=\frac{1}{2}$ 以及 $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$ 时,秩 $A=2$,且除 $\mu=\frac{1}{2},\lambda=0$ 或 $\lambda=1$,或 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 外,其他任何 μ 及 λ 的值都不能使 A 的所有三阶子式为 0. 所以,当且仅当 $\lambda=0,\mu=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=1,\mu=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$ 时,A 的秩是偶数.

例 13 设 A 是一个 m 行矩阵,秩 $A=r$,从 A 中任意取出 s 行,作一个 s 行的矩阵 B,证明秩 $B\geqslant r+s-m$.

证明 设秩 $B=t$,仅须证 $r-t\leqslant m-s$.

设矩阵 A 的行向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,矩阵 B 的行向量组为 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant m)$,其极大无关组为 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_t}$,$t=$ 秩 B. 因为秩 $A=r$,所以可在 A 中除去 B 所在的行外,在余下的 $m-s$ 个行向量中适当选取 $r-t$ 行添加到 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_t}$,得到 A 的行向量组的一个极大无关组. 因此,$r-t\leqslant m-s$. 从而 $t\geqslant r+s-m$.

例 14 设

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}$$

其中 A_i 是 n_i 阶方阵，$\sum_{i=1}^{s} n_i = n$，证明：秩 $A = \sum_{i=1}^{s}$ 秩 A_i.

证明 用数学归纳法.

当 $s=1$ 时，$A=A_1$，秩 $A=$ 秩 A_1，结论正确.

设结论对 $s-1$ 成立，将 A 写成

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & \\ & B \end{bmatrix}$$

其中 B 是 $A_2, A_3, \cdots, A_s$ 放在一起所成的子阵. 设秩 $A_1=r_1$，秩 $B=t$，在 A_1, B 中分别取一个 r_1 阶子式 $|\Delta_1|\neq 0$ 及 t 阶子式 $|\Delta_2|\neq 0$. 因此 A 有 r_1+t 阶子式 $\begin{vmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{vmatrix}\neq 0$. 故矩阵 $\begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}$ 的列线性无关，A_1 (B) 在 A 中所在的列的极大无关组是 $\Delta_1(\Delta_2)$ 所在的列. 故 $A=\begin{bmatrix} A_1 & \\ & B \end{bmatrix}$ 的任一列均可由 $\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$ 的列线性表示. 所以秩 $A=r_1+t=$ 秩 A_1+ 秩 B. 由归纳假设知，秩 $B=$ 秩 $A_2+\cdots+$ 秩 A_s. 于是秩 $A=\sum_{i=1}^{s}$ 秩 A_i. 证毕.

把矩阵的秩与方程组的同解联系起来，也是一种求秩的方法，这里要用到如下结论：

设 A 是 $n\times s$ 矩阵，B 是 $s\times n$ 矩阵，则方程组 $(AB)X=0$ 与 $BX=0$ 同解的充分必要条件是秩 $(AB)=$ 秩 B（证明见 §2 例 9）.

例 15 设 A, B 分别是实数域 R 上的 $s\times n$ 矩阵及 $s\times m$ 矩阵，证明：

(1) 秩 $A'A=$ 秩 A；

(2) 存在 R 上的 $n\times m$ 矩阵 C 使 $A'AC=A'B$.

证明 (1) 仅须证 $(A'A)X=0$ 与 $AX=0$ 同解.

显然，$AX=0$ 的解是 $(A'A)X=0$ 的解. 因此，只要证明 $(A'A)X=0$ 的解是 $AX=0$ 的解.

设 X_0 是 $(A'A)X=0$ 的解，X_0 是属于 R^n 的一个 n 维列向量，那

么$(A'A)X_0=0$，则 $X_0'(A'A)X_0=0$，从而$(AX_0)'(AX_0)=0$. 由已知条件 AX_0 是实矩阵，设

$$AX_0=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_s\end{pmatrix}$$

则 $$(AX_0)'(AX_0)=(c_1,c_2,\cdots,c_s)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_s\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{s}c_i^2=0$$

而 c_i 是实数，所以 $c_i=0(i=1,2,\cdots,s)$，即 $AX_0=0$.

综上所述，$(A'A)X=0$ 与 $AX=0$ 同解. 故秩$(A'A)=$秩 A.

注意 当 A 是复矩阵时，结论不一定成立. 例如

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\i&0\end{bmatrix},\quad A'A=\begin{bmatrix}1&i\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\i&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

所以秩 $A\neq$秩$(A'A)$.

$$(2)\text{设 } A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}$$

A 的第 i 行为 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,s)$，则

$$A'=(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_s).$$

设 B 的第 j 列为 $\beta_j=(b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{sj})'(j=1,2,\cdots,m)$. 易知，$A'A$的列以及 $A'\beta_j$ 都是 $\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_s$ 的线性组合.

所以秩$(A'A)\leqslant$秩$(A'A,A'\beta_j)\leqslant$秩 $A'=$秩 $A=$秩$(A'A)$. 从而秩$(A'A)=$秩$(A'A,A'\beta_j)$. 故方程组$(A'A)X=A'\beta_j$ 有解（参看§2）. 令对应 β_j 的解是 C_j，则 $C=(C_1,C_2,\cdots,C_m)$即为所求的矩阵.

例 16 设 A,B 均为实矩阵，若 $BA=E$，则称 B 是 A 的**左逆**，证明：A 存在左逆的充分必要条件是 A 的列向量组线性无关.

证明 设 A 是 $s\times n$ 矩阵.

必要性 若 $BA=E$,则 $n=$秩 $E=$秩$(BA)\leqslant$秩 A. 另一方面,秩 $A\leqslant$列数 n,所以秩 $A=n$. 从而 A 的列向量组线性无关.

充分性 设 A 的列向量组线性无关,则秩 $A=n$,由例 15 知,秩$(A'A)=$秩 $A=n$. 故 $A'A$ 可逆,$(A'A)^{-1}$存在. 令 $B=(A'A)^{-1}A'$,则 $BA=(A'A)^{-1}A'A=E$. 即 B 是 A 的左逆.

例 17 设 A,B,C,D 分别是 $k\times l,l\times m,m\times n,n\times k$ 矩阵,试证:

(1)若秩$(DA)=$秩 A,则秩$(DAB)=$秩(AB).

(2)若秩$(BC)=$秩 B,则秩$(ABC)=$秩(AB).

证明 (1)仅须证方程组$(DAB)X=0$与方程组$(AB)X=0$同解.

显然,方程组$(AB)X=0$的解都是方程组$(DAB)X=0$的解.

设 X_0 是方程组$(DAB)X=0$的任一解,则$(DAB)X_0=0$,即$(DA)(BX_0)=0$. 由题设条件知,方程组$(DA)X=0$与方程组 $AX=0$ 同解,故 BX_0 是 $AX=0$ 的解,即有 $A(BX_0)=0$. 因此$(AB)X_0=0$. 故 X_0 是方程$(AB)X=0$的解.

综合上述,方程组$(AB)X=0$与方程组$(DAB)X=0$同解. 因此,秩$(DAB)=$秩(AB).

(2)注意到秩$(ABC)=$秩$(ABC)'=$秩$(C'B'A')$,秩$(AB)=$秩$(AB)'=$秩$(B'A')$,因此仅须证秩$(C'B'A')=$秩$(B'A')$即可.

由题设条件,秩$(C'B')=$秩 B'. 由(1)的结果,秩$(C'B'A')=$秩$(B'A')$. 从而有秩$(ABC)=$秩(AB).

应用矩阵的等价标准形,常常可以使问题简化.

例 18 证明:一个秩为 r 的 $s\times n$ 矩阵 A 总可以表为 r 个秩为 1 的矩阵的和.

证明 因为秩 $A=r$,所以存在可逆矩阵 P 和 Q 使

$$PAQ=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$$

令 E_{ij}是第 i 行第 i 列交叉处的元素是 1 而其余元素都是零的 $s\times n$ 矩阵，则 $A=P^{-1}E_{11}Q^{-1}+P^{-1}E_{22}Q^{-1}+\cdots+P^{-1}E_{rr}Q^{-1}$. 因为 P^{-1}, Q^{-1}都是可逆的，所以秩$(P^{-1}E_{ii}Q^{-1})=$秩 $E_{ij}=1$.

例 19 设 A 是 $n\times(n+1)$矩阵，E 是 n 阶单位矩阵，证明：存在$(n+1)\times n$ 矩阵 X 使 $AX=E$ 成立的充分必要条件是秩 $A=n$.

证明 必要性 因为 A 是 $n\times(n+1)$矩阵，所以秩 $A\leqslant n$. 又因为秩 $A\geqslant$秩$(AX)=$秩 $E=n$，所以秩 $A=n$.

充分性 因为秩 $A=n$，所以存在可逆矩阵 P 和 Q，使

$A=P(E_n\quad 0)Q$. 令 $X=Q^{-1}\begin{bmatrix}E_n\\ 0\end{bmatrix}P^{-1}$，则有

$AX=P(E_n\quad 0)Q\cdot Q^{-1}\begin{bmatrix}E_n\\ 0\end{bmatrix}P^{-1}=PE_nP^{-1}=E_n=E.$

例 20 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，证明：

(1)秩 $A+$秩 $B-n\leqslant$秩(AB)；

(2)若秩 $A=n$，则秩$(AB)=$秩 B；

(3)若秩 $B=n$，则秩$(AB)=$秩 A.

证明 (1)设秩 $A=r_1$，秩 $B=r_2$，秩$(AB)=r$，则存在可逆矩阵 P 和 Q，使

$$PAQ=\begin{bmatrix}E_{r_1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

那么

$$Q^{-1}B=\begin{pmatrix}B_{r_1\times s}\\ B_{(n-r_1)\times s}\end{pmatrix},\quad (PAQ)(Q^{-1}B)=\begin{bmatrix}B_{r_1\times s}\\ 0\end{bmatrix}$$

秩$(PAQ)(Q^{-1}B)=$秩$(PAB)=$秩$(AB)=r$. 在 $Q^{-1}B$ 中，秩$(Q^{-1}B)$ $=$ 秩 $B=r_2$，秩$(B_{r_1\times s})=$秩$(PAQ)(Q^{-1}B)=$秩 r，故 $r_2\geqslant r$. 那么，从 $B_{(n-r_1)\times s}$的 $n-r_1$ 个行向量中，适当选取 r_2-r 个行向量与 $B_{r_1\times s}$中 r 个

线性无关的行向量一起，可构成 $Q^{-1}B$ 的行向量组的一个极大无关组. 因此 $n-r_1\geqslant r_2-r$. 即 $r\geqslant r_1+r_2-n$. 也就是秩$(AB)\geqslant$秩 $A+$秩 $B-n$.

由此可得，若 $AB=0$，则秩 $A+$秩 $B\leqslant n$.

(2)因为秩$(AB)\leqslant$秩 B，由(1)得

秩$(AB)\geqslant$秩 $A+$秩 $B-n=n+$秩 $B-n=$秩 B.

所以，秩$(AB)=$秩 B.

(3)的证明与(2)类似.

例 21 (**满秩分解定理**) 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，则 $A=HL$，其中 H 是 $m\times r$ 列满秩阵，L 是 $r\times n$ 行满秩阵.

证明 因为秩 $A=r$，所以存在可逆矩阵 P 和 Q 使

$$A=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$$

故 $A=P\begin{bmatrix}E_r\\ 0\end{bmatrix}(E_r\quad 0)Q$. 令 $H=P\begin{bmatrix}E_r\\ 0\end{bmatrix}$，$L=(E_r\quad 0)Q$，则 $A=HL$. 又因为 P,Q 都是满秩的，所以秩 $H=$秩$\begin{bmatrix}E_r\\ 0\end{bmatrix}=r$，秩 $L=$秩$(E_r\quad 0)=r$.

例 22 证明：秩$(ABC)\geqslant$秩$(AB)+$秩$(BC)-$秩 B.

证明 令 $B=HL$，H 是列满秩阵，L 是行满秩阵，则 $ABC=(AH)(LC)$.

秩$(ABC)=$秩$(AH)(LC)\geqslant$秩$(AH)+$秩$(LC)-LC$ 的行数.

下面证明：秩$(AH)=$秩(AB)，秩$(LC)=$秩(BC)，LC 的行数$=$秩 B.

秩$(AB)=$秩(AHL)，L 是行满秩阵. 由例 20 知，秩$(AHL)=$秩(AH).

秩$(BC)=$秩(HLC)，H 是列满秩阵，由例 20 知，秩$(HLC)=$秩(LC).

LC 的行数$=L$ 的行数$=$秩 $L=$秩$(HL)=$秩 B.

$\therefore$ 秩$(ABC)\geqslant$秩$(AB)+$秩$(BC)-$秩 B.

§2 线性方程组

基本概念与结论

一、齐次线性方程组

设有齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0(i = 1,2,\cdots,s) \tag{7}$$

矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{S1} & a_{S2} & \cdots & a_{SN} \end{pmatrix} \qquad (a_{ij}\in P)$$

称为方程组(7)的**系数矩阵**.

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是齐次线性方程组(7)的一组解. 如果

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,

(2)方程组(7)的任一个解均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是(7)的一个**基础解系**.

注意 当齐次线性方程组只有零解时,则不存在**基础解系**.

2. 方程组(7)有非零解的充分必要条件是秩 $A=r<n$. 此时,方程组(7)有基础解系,且基础解系所含向量个数为 $n-r$.

3. 设方程组(7)的系数矩阵的秩为 r,则方程组(7)的任意 $n-r$ 个线性无关的解都是(7)的基础解系.

4. 齐次线性方程组的方程个数小于未知量个数时,方程组有非零解.

注意 这只是有非零解的充分条件，而不是必要条件. 例如，$\begin{cases}x_1+2x_2=0\\2x_1+4x_2=0\end{cases}$有非零解，但方程个数等于未知量个数.

5. 当方程个数等于未知量个数时，方程组(7)有非零解的充分必要条件是$|A|=0$.

6. 齐次线性方程组解向量全体组成的集合 V 称为齐次线性方程组的**解空间**，基础解系所含向量个数 $n-r$(n 是未知量个数，r 是系数矩阵 A 的秩)称为**解空间的维数**.

二、一般线性方程组

设有一般线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots,s). \tag{8}$$

矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix}$$

称为方程组(8)的**系数矩阵**.

矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s\end{pmatrix}$$

称为方程组(8)的**增广矩阵**. 对于一般线性方程组，主要讨论四个问题：解的存在性、个数、求法以及解的结构.

1. **解的判定定理** 方程组(8)有解的充分必要条件是 秩 A ＝秩 $\overline{A}$.

2. 设秩 A＝秩 $\overline{A}=r$，则方程组(8)有唯一解的充分必要条件是

$r=n$，方程组(8)有无限多解的充分必要条件是 $r<n$.

3. **解的结构定理** 当方程组(8)的常数项均为0时，方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0(i=1,2,\cdots,s)$ 称为(8)的**导出方程组**. 如果 η 是方程组(8)的一个特解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是其导出方程组的一个基础解系，则方程组(8)的全部解就是 $\eta+k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}$，其中 r 是矩阵 A 的秩，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是数域 P 中的任意数.

应用举例

一、一般线性方程组的解

一般线性方程组的解法有：(1)消元法；(2)公式法. 对未知量个数与方程个数相等且系数行列式不为零的线性方程组还可以用克莱姆法则. 实际问题中常用的是消元法.

例1 λ 取怎样的数值时，线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+2x_3-3x_4=2\\ \lambda^2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-1\\ \lambda^3x_1-x_2+2x_3-x_4=-1\end{cases}$$

有解？

解 对方程组增广矩阵的行施行初等变换，得

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 2 & -3 & 2\\ \lambda^2 & -3 & 2 & 1 & -1\\ \lambda^3 & -1 & 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[2+1(-\lambda)]}]{[3+2(-\lambda)]}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & -3-\lambda & 2-2\lambda & 1+3\lambda & -1-2\lambda\\ 0 & -1+3\lambda & 2-2\lambda & -1-\lambda & -1+\lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3+2(-1)]}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & -3-\lambda & 2-2\lambda & 1-3\lambda & -1-2\lambda\\ 0 & 2+4\lambda & 0 & -2-4\lambda & 3\lambda\end{pmatrix}$$

可见，当 $\lambda(2-2\lambda)(2+4\lambda)\neq 0$，即 $\lambda\neq 0,\lambda\neq 1,\lambda\neq\frac{-1}{2}$时，秩 A $=$秩 $\overline{A}=3$. 故方程组有解.

当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-\frac{1}{2}$时，方程组无解.

例 2 a,b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+2x_3=1 \\ ax_1+(2b-1)x_2+3x_3=1 \\ ax_1+bx_2+(b+3)x_3=2b-1 \end{cases}$$

有唯一解、没有解、有无穷多解？在有解情况下求其解.

解

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 3 \\ a & b & b+3 \end{vmatrix}=a(b-1)(b+1)$$

当 $a\neq 0,b\neq\pm 1$ 时，$D\neq 0$. 由克莱姆法则知，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{5-b}{a(b+1)},\quad x_2=\frac{-2}{b+1},x_3=\frac{2(b-1)}{b+1}.$$

当 $D=0$ 时，分以下四种情况讨论：

(1)$b=1,a\neq 0$，此时，秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=2$. 方程组有无穷多解：

$$x_1=\frac{1-x_2}{a},x_3=0,x_2 \text{ 任意}.$$

(2)$b=1,a=0$. 此时，秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=2$. 方程组有无穷多解：

$$x_1 \text{ 任意},x_2=1;x_3=0.$$

(3)$b=-1$. 此时，秩 $A=2$，秩 $\overline{A}=3$. 方程组无解.

(4)$b\neq\pm 1,a=0$. 当 $b\neq 5$ 时，秩 $\overline{A}=3$. 方程组无解. 当 $b=5$ 时，有无穷多解：x_1 任意，$x_2=-\frac{1}{3},x_3=\frac{4}{3}$.

例 3 证明:线性方程组

$$\begin{cases} 2^{-1}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ 2^{-2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^{-n}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

只有唯一的零解.

分析 经整理可以看出,这是含有 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组. 要证明它有唯一的零解,只需证明其系数行列式不为零即可.

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}-2^{-1} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-2^{-2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-2^{-n} \end{vmatrix}$$

$$=2^{-1}\cdot 2^{-2}\cdots 2^{-n}\begin{vmatrix} 2^1\cdot a_{11}-1 & 2^1\cdot a_{12} & \cdots & 2^1\cdot a_{1n} \\ 2^2\cdot a_{21} & 2^2\cdot a_{22}-1 & \cdots & 2^2\cdot a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 2^n\cdot a_{n1} & 2^n\cdot a_{n2} & \cdots & 2^n\cdot a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

$$=2^{-1}\cdot 2^{-2}\cdots 2^{-n}\cdot D_1$$

把 D_1 按列分拆成 2^n 个行列式,其中除一个主对角线元素为 -1,其余元素为 0 的行列式外,其余 2^n-1 个行列式值均为偶数,所以,$D_1=(-1)^n+D_2$. D_2 是偶数,故 $D_1\neq 0$,从而 $D\neq 0$. 所以,原方程组有唯一的零解.

例 4 证明:方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

对任何 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都有解的充分必要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

证明 充分性 由克莱姆法则即得.

必要性 设系数矩阵 $A=(a_{ij})$ 的行向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,增广矩阵为 $\overline{A}$.

假设 $|A|=0$,则秩 $A=r<n$. 不妨设 A 的前 r 行是行向量组的极大无关组. 令 $b_1=\cdots=b_r=b_{r+2}=\cdots=b_n=0,b_{r+1}=1$,则增广矩阵 $\overline{A}$的秩$=r+1\neq$秩 A 故方程组无解,这与题设矛盾. 所以 $|A|\neq 0$.

例 5 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{9}$$

的系数矩阵 A 的秩等于矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩,证明:方程组(9)有解. 逆命题是否成立?

分析 要证(9)有解,只需证明它的系数矩阵 A 与增广矩阵

$\overline{A}$有相同的秩

证明 因为$\overline{A}$的行向量是 B 的前 n 行，所以秩 $\overline{A}\leqslant$秩 B. 已知秩 $A=$秩 B，所以秩 $\overline{A}\leqslant$秩 A. 但秩 $A\leqslant$秩 $\overline{A}$，故秩 $\overline{A}=$秩 A. 所以方程组(9)有解.

逆命题未必成立. 例如：

$$\begin{cases}2x_1+x_2=1\\x_1+x_2=2\end{cases},\quad A=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix},\quad \overline{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

秩 $A=$秩 $\overline{A}=2$，方程组有解. 但

$$B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&2\\1&2&0\end{pmatrix}$$

秩 $B=3\neq$秩 A.

例 6 设 A,B 是数域 P 上的 n 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 分别是 A,B 的列向量，且线性方程组 $AX=\beta_1,AX=\beta_2,\cdots,AX=\beta_n$ 都有解，求证：线性方程组 $BY=\alpha_1,BY=\alpha_2,\cdots,BY=\alpha_n$ 都有解的充分必要条件是秩 $A=$秩 B.

分析 要证秩 $A=$秩 B，只要证明 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 B 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价即可.

证明 由题设 $AX=\beta_1,AX=\beta_2,\cdots,AX=\beta_n$ 都有解知，秩 $A=$秩$(A,\beta_1)=$秩$(A,\beta_2)=\cdots=$秩(A,β_n). 因此，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

必要性 由 $BY=\alpha_1,BY=\alpha_2,\cdots,BY=\alpha_n$ 都有解知，秩 $B=$秩$(B,\alpha_1)=$秩$(B,\alpha_2)=\cdots=$秩(B,α_n). 因此，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示. 从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价，所以，秩 $A=$秩 B.

充分性 已知秩 $A=$秩 B. 即秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=$秩$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$. 由题设推知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，那么 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的极大无关组可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组线性表示.

由替换定理，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的极大无关组与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组等价，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价. 因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示. 于是，秩$(B,\alpha_1)=$秩$(B,\alpha_2)=\cdots=$秩$(B,\alpha_n)=$秩 B. 因此，方程组 $BY=\alpha_1,BY=\alpha_2,\cdots,BY=\alpha_n$ 都有解.

例 7 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为实数域上的矩阵，且 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\ (i=1,2,\cdots,n)$. 证明：$|A|\neq 0$.

分析 若能证得方程组 $AX=0$ 只有零解，即可证得 $|A|\neq 0$. 为此，需证对任意一组不全为零的数 $b_1,\cdots,b_n$ 存在某个 k，使 $\sum_{j=1}^{n}a_{kj}b_j\neq 0$ 即可.

证明 对任意的一组不全为 0 的数 $b_1,\cdots,b_n$，设 $|b_k|=\max(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_n|)$，则 $|a_{kk}\cdot b_k|=|a_{kk}||b_k|>|b_k|\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\geqslant\sum_{j\neq k}|a_{kj}||b_j|=\sum_{j\neq k}|a_{kj}b_j|\geqslant|\sum_{j\neq k}a_{kj}\cdot b_j|$. 因此，$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}b_j=a_{kk}b_k+\sum_{j\neq k}a_{kj}b_j\neq 0$. 于是方程组 $AX=0$ 只有零解. 故 $|A|\neq 0$.

例 8 证明：方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{10}$$

有解的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m = 0 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m = 0 \end{cases} \tag{11}$$

的每个解$(c_1,c_2,\cdots,c_m)$都适合$\sum_{i=1}^{m} c_i b_i = 0$.

证明 必要性 设方程组(10)的系数矩阵为$A=(a_{ij})$,增广矩阵为$\overline{A}=(A,B)$,$B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'$.

设$K=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$是(10)的一个解,则$AK'=B$.设$C=(c_1,c_2,\cdots,c_m)$是(11)的任一个解,则有$A'C'=0$.于是,$C(AK')=CB$,$(CB)'=(CAK')'=KA'C'=0$.也就是$\sum_{i=1}^{m} c_i b_i = 0$.

充分性 只须证秩A=秩$\overline{A}$,则方程组(10)有解.

设A的行向量为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,$\overline{A}$的行向量为$\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\cdots,\overline{\alpha_m}$,且秩$A=r$.若$r=m$,则秩$\overline{A}=m$.故秩$A$=秩$\overline{A}$.若$r<m$,不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$A$的行向量组的极大无关组,则只须证$\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\cdots,\overline{\alpha_r}$是$\overline{A}$的行向量组的极大无关组.首先,由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关易知,$\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\cdots,\overline{\alpha_m}$线性无关.其次,每个$\alpha_j(r<j\leqslant m)$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示,故存在$k_1,k_2,\cdots,k_r$使$\alpha_j=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$.也就是$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r-\alpha_j=0$.由此可知,$(k_1,k_2,\cdots,k_r,0,\cdots,\overset{(j)}{-1},\cdots,0)$是方程组(11)的一个非零解.由题设,$k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_rb_r-b_j=0$.即$b_j=k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_rb_r$.因此,$\overline{\alpha_j}=k_1\overline{\alpha_1}+k_2\overline{\alpha_2}+\cdots+k_r\overline{\alpha_r}$.于是,$\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\cdots,\overline{\alpha_m}$是$\overline{A}$的行向量组的极大无关组.故秩$\overline{A}$=秩$A=r$.

二、基础解系

例9 设A是$n\times s$矩阵,B是$s\times n$矩阵,证明:方程组$(AB)X=0$与$BX=0$同解的充分必要条件是秩(AB)=秩B.

证明 必要性 已知$(AB)X=0$与$BX=0$同解,那么它们有相同的基础解系.所以$n-$秩$(AB)=n-$秩B.从而秩(AB)=秩B.

充分性　因为秩(AB)＝秩B. 所以$n-$秩$(AB)=n-$秩B. 可见，方程组$(AB)X=0$的基础解系与方程组$BX=0$的基础解系所含解向量的个数相同. 显然，方程组$BX=0$的解都是$(AB)X=0$的解. 因此，$BX=0$的基础解系也是$(AB)X=0$的基础解系. 所以，$BX=0$与$(AB)X=0$同解.

例 10　设齐次线性方程组$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0(i=1,2,\cdots,n)$的系数行列式$D=0$，而$D$某一元素$a_{ij}$的代数余子式$A_{ij}\neq 0$，证明：这个方程组的解都可以写成$(kA_{i1},kA_{i2},\cdots,kA_{in})$的形式，此处$k$是任意数.

分析　要证方程组的解都可以写成$(kA_{i1},kA_{i2},\cdots,kA_{in})$的形式，只要证$(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})$是齐次线性方程组的基础解系即可. 为此，首先考虑系数矩阵的秩.

证明　方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

由于$D=|A|=0$，a_{ij}的代数余子式$A_{ij}\neq 0$，因此，A有一个$n-1$阶子式$\neq 0$. 所以秩$A=n-1$. 从而$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0(i=1,2,\cdots,n)$的基础解系所含解的向量个数为$n-(n-1)=1$个. 又因为$\sum\limits_{l=1}^{n}a_{jl}A_{il}=\begin{cases}|A|=0, & j=i,\\ 0, & j\neq i,\end{cases}$所以，$(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})$是$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0(i=1,\cdots,n)$的一个基础解系. 方程组的解都可以写成$(kA_{i1},kA_{i2},\cdots,kA_{in})$的形式.

例 11　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s<n)$是$s$个线性无关的$n$维向量，证明：它们必是某个含有$n$个未知量的齐次线性方程组的基础解系.

分析　设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,s)$. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是

齐次线性方程组 $BX=0$ 的基础解系，则有 $B\alpha_i'=0 \quad (i=1,\cdots,s)$，秩 $B=n-s$. 令 $n-s=r$，可设 B 是 $r\times n$ 矩阵，

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

由 $B\alpha_i'=0$，得

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{in} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (i=1,\cdots,r)$$

即所求矩阵 B 的列向量是齐次成 n 方程组 $AX=0$ 的基础解系，其中 A 的等 i 行是 $\alpha_i(i=1,\cdots,s)$.

证明 设 $\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$

$\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\alpha_s=(a_{s1},a_{s2},\cdots,a_{sn})$

令 A 是以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为行向量的 $s\times n$ 矩阵，作以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 $AX=0$ 则秩 $A=s<n$. 设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}$ 是 $AX=0$ 的基础解系，$\beta_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}) \quad (i=1,\cdots,n-s)$，以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}$ 为行作矩阵 B，则容易证明，齐次线性方程组 $BX=0$ 的基础解系是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$.

例 12 求作一齐次线性方程组，使它的解空间由下列四个向量生成：

$$\alpha_1=(-1,-1,1,2,0) \qquad \alpha_2=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},6,4)$$

$$\alpha_3=(\frac{1}{4},0,0,\frac{5}{4},1) \qquad \alpha_4=(-1,-2,2,9,4)$$

解 令

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 & 4\\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 1\\ -1 & -2 & 2 & 9 & 4\end{pmatrix}$$

求得齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系为

$$\eta_1=(0,1,1,0,0)',\eta_2=(-5,7,0,1,0)'$$

$$\eta_3=(-4,4,0,0,1)'$$

以 η_1,η_2,η_3 为行向量作

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 7 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则 $BX=0$ 即为所求的线性方程组.

例 13 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\bar{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\neq 0$$

已知秩 $A=$ 秩 $\bar{A}=r<n$,证明:方程组 $AX=b$ 有 $n-r+1$ 个线性无关的解 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$,使得 $\sum_{i=1}^{n-r+1}t_i\eta_i$ 也是方程组 $AX=b$ 的解,其中 $\sum_{i=1}^{n-r+1}t_i=1$;并且方程组 $AX=b$ 的任一解 η 可写成 $\eta=\sum_{i=1}^{n-r+1}k_i\eta_i$,其

中$\sum_{i=1}^{n-r+1} k_i=1$.

证明 设η是方程组$AX=b$的一个解而$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$是方程组$AX=0$的基础解系，其中$\eta,\beta_i$都是$n$维列向量，则$\eta,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$线性无关（否则，$\eta=\sum_{i=1}^{n-r} k\beta_i$，$A\eta=\sum_{i=1}^{n-r} k_iA\beta_i=0$，而$A\eta=b\neq 0$，矛盾）. 令$\eta_i=\beta_i+\eta(i=1,\cdots,n-r)$，$\eta_{n-r+1}=\eta$，易知$\eta_i(i=1,\cdots,n-r+1)$是$AX=b$的$n-r+1$个线性无关的解.

其次，令$\eta=\sum_{i=1}^{n-r+1} t_i\eta_i$，且$\sum_{i=1}^{n-r+1} t_i=1$，则$A\eta=\sum_{i=1}^{n-r+1} t_iA\eta_i=\sum_{i=1}^{n-r+1} t_ib=b(\sum_{i=1}^{n-r+1} t_i)=b$，所以，$\eta$是$AX=b$的一个解.

最后，因为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$是$AX=b$的$n-r+1$个线性无关的解，易证$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1,\cdots,\eta_{n-r+1}-\eta_1$线性无关，且是$AX=0$的基础解系. 因此，$AX=b$的任一解$\eta$都可以写成

$$\begin{aligned}\eta&=\eta_1+k_2(\eta_2-\eta_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)\\&=(1-k_2-\cdots-k_{n-r+1})\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}\end{aligned}$$

令 $t_1=1-k_2-\cdots-k_{n-r+1},t_2=k_2,\cdots,t_{n-r+1}=k_{n-r+1}$,

则 $\eta=\sum_{i=1}^{n-r+1} t_i\eta_i$，且$\sum_{i=1}^{n-r+1} t_i=1$.

*§3 广义逆矩阵简介

矩阵的逆的概念只对非奇异的方阵才有意义. 但是，在实际问题中，我们碰到的矩阵并不都是方阵，即使是方阵也不都是非奇异的，因此，有必要推广矩阵的逆的概念.

本节不准备介绍各种广义逆矩阵，只简介1935年Moore与1955年Penrose定义的一种广义逆矩阵及其性质.

定义 设A是$m\times n$矩阵，若存在$n\times m$矩阵B使

（Ⅰ）　$ABA=A$；

（Ⅱ）　$BAB=B$；

（Ⅲ）　$(AB)'=AB$；

（Ⅳ）　$(BA)'=BA$，

则称 B 是 A 的**广义逆矩阵**.

当 A 是非奇异方阵时，取 $B=A^{-1}$，则 B 满足条件（Ⅰ）至（Ⅳ）.故广义逆矩阵是通常逆矩阵的推广.

定理 1　设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，则 A 的广义逆矩阵存在，并且是唯一的.

证明　存在性　作 A 的满秩分解

$$A=HL$$

其中 H 是 $m\times r$ 列满秩阵，L 是 $r\times n$ 行满秩阵.容易验证，$n\times r$ 阵 $L'(LL')^{-1}$ 与 $r\times m$ 阵 $(H'H)^{-1}H'$ 分别是 L 与 H 的广义逆.令 $B=L'(LL')^{-1}\cdot(H'H)^{-1}H'$，容易验证，$B$ 满足条件（Ⅰ）至（Ⅳ）.所以，B 是 A 的广义逆矩阵.

唯一性　设 C 也是 A 的广义逆矩阵，则

$$\begin{aligned}C&=CAC=C(AC)'=CC'(ABA)'=CC'A'(AB)'=C(AC)'(AB)\\&=C(AB)=(CA)'B=(ABA)'C'B=(BA)'(A'C')B=BACAB\\&=BAB=B\end{aligned}$$

把唯一满足条件（Ⅰ）至（Ⅳ）的矩阵 A 的广义逆记作 A^+（以区别于一般的广义逆 A^-），又称**加号逆**.

由存在性证明过程可以看出，

$$A^+=(HL)^+=L^+H^+$$

$$H^+=(H'H)^{-1}H'$$

$$L^+=L'(LL')^{-1}$$

例　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&2\\0&1&4\end{pmatrix}$，求 A^+.

解 $$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&4\end{bmatrix}=HL$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}^{+}=H^{+}=(H'H)^{-1}H'=\begin{bmatrix}5&2\\2&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&2&-2\\-2&1&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&4\end{bmatrix}^{+}=L^{+}=L'(LL')^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&4\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2&-4\\-4&17\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}17&4\\4&2\\-1&4\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{+}=L^{+}H^{+}=\frac{1}{54}\begin{pmatrix}13&19&-7\\2&5&1\\-5&1&11\end{pmatrix}$$

定理 2 A^+有如下的性质：

(1)秩 $A^+=$秩 $A=$秩$(AA^+)=$秩(A^+A)；

(2)$(A^+)^+=A$；

(3)$(A')^+=(A^+)'$；

(4)$(A'A)^+=A^+(A^+)'$.

证明 (1)设秩 $A=r$，$A=HL$，H 是列满秩阵，L 是行满秩阵，则 H^+是行满秩阵，L^+是列满秩阵. 由 § 1 例 21 知，

秩$(A^+)=$秩$(L^+H^+)=$秩$(H^+)=$秩$((H'H)^{-1}H')=$秩 $H'=$秩 $H=r$.

又 $H^+H=E_r=LL^+$，故

秩$(A^+A)=$秩$(L^+H^+HL)=$秩$(L^+L)=$秩 $L=r$

秩$(AA^+)=$秩$(HLL^+H^+)=$秩$(HH^+)=$秩 $H=r$

(2)由(Ⅰ)至(Ⅳ)对 A、A^+ 而言是对称的,即得.

(3),(4)逐条验证(Ⅰ)至(Ⅳ)即可得到.

下面用广义逆矩阵判断一般线性方程组是否有解,并在有解时,把方程组的任一解明确表示出来.

定理 3 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,则方程组 $AX=b$ 有解的充分必要条件是

$$AA^+b=b \tag{1}$$

当 $AX=b$ 有解时,方程组的任一解可表为

$$X=A^+b+(E_n-A^+A)u \tag{2}$$

其中 u 是任意 n 维列向量.

证明 若 $AX=b$ 有解,则由(Ⅰ)知,$b=AX=AA^+AX=AA^+b$.

反之,将(2)代入方程组 $AX=b$,利用 $AA^+A=A$ 以及 $AA^+b=b$ 即可得出(2)是方程组 $AX=b$ 的解.

其次,设 X_0 是方程组的任一解,则有 $AX_0=b$. 取 $u=X_0$,就有 $A^+b+(E_n-A^+A)u=A^+b+u-A^+Au=A^+AX_0+u-A^+AX_0=u=X_0$. 即方程组的任一解都可表为(2)的形式.

习　题

1. 求向量组

$\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-1,2,0),$

$\alpha_5=(2,1,5,6)$

的极大线性无关组,并用这个极大无关组表示其余向量.

2. 设 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$,　$\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_r,\cdots,\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}$,试证:。$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价.

3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta,\gamma$ 线性相关,证明:或者 β 与 γ 中至少有一个可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示,或者向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\gamma$ 等价.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha,\beta$ 都是 n 维向量,试证:若 α 不能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合,但能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 的线性组合,则 β 也不能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$

的线性组合，但能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 的线性组合.

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，向量组 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(\beta\neq 0)$线性相关，则 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有且仅有一个向量 α_i 可由其前面的向量线性表出.

6. 设 A 是 $n\times s$ 矩阵，试证：A 是右零因子(即存在 $B\neq 0$，使 $BA=0$)的充要条件是 A 的行向量线性相关。

7. 设 A 是实数域 P 上 $m\times n$ 矩阵，B 是数域 P 上 $n\times m$ 矩阵，若 $AB=E$. 则称 B 是 A 的**右逆**. 这时说 A 有右逆. 试给出数域 P 上一个矩阵有右逆的充分必要条件，并证明之.

8. 求 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1-a & \cdots & 1-a \\ 1-a & 2 & \cdots & 1-a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-a & 1-a & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

的秩.

9. 设行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

令 A_{ij}是元素 a_{ij}的代数余子式，证明：矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

的秩是 0 或 1.

10. 设 A 是三阶矩阵，且 $A\neq\pm E, A^2=E$，试证：秩$(A+E)$与秩$(A-E)$必有一个为 1.

11. 试证：秩$(AB-E)\leqslant$秩$(A-E)+$秩$(B-E)$.

12. 设 $A\in P^{m\times n}$，秩 $A=r$，证明：

(1)存在可逆矩阵 $P\in P^{m\times m}$，使 $PA=\begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$，其中 $B_r\in P^{r\times n}$，且秩 $B_r=r$；

(2)存在可逆矩阵 $Q\in P^{n\times n}$,使 $AQ=(C_r,0)^{m\times n}$,其中 $C_r\in P^{m\times r}$,秩 $C_r=r$.

13. 设 A,B,C 都是 n 阶方阵,证明:若秩 $A=$ 秩(BA),则秩$(AC)=$ 秩(BAC).

14. 已知 A 是 $m\times n$ 实矩阵,B 是 $n\times p$ 实矩阵,C 是 $p\times s$ 实矩阵,且秩 $A=n$,秩 $C=p$,$ABC=0$,证明:$B=0$.

15. (1)设 $XAB=XAC$,且秩 $XA=$ 秩 A,则 $AB=AC$;(2)设 $BAY=CAY$,且秩 $AY=$ 秩 A,则 $BA=CA$.

16. 当 λ 取何值时,线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda\\ \lambda x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=\lambda\\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3\end{cases}$$

(1)无解;(2)有唯一解;(3)有无穷多解.当有无穷多解时,求出一般解.

17. 线性方程组

$$AX=B \qquad (1)$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 5 & 1\\ 5 & 8 & 2\\ -4 & -1 & -1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{pmatrix}$$

选取两个 $B\neq 0$,分别使:(1)方程组(1)无解;(2)方程组(1)有解.有解时,有多少解?并求其解.

18. a_{ik}是给定的 n^2 个整数,证明:对任意 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,方程组 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$都有整数解的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\pm 1$$

19. 试证:线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=b_{n+1}\end{cases}$$

有解的必要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & b_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

20. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是齐次线性方程组的基础解系，证明：适合下列等式的向量组

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1r}\alpha_r \\ \beta_1 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2r}\alpha_r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_r &= a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \cdots + a_{rr}\alpha_r \end{aligned} \qquad (2)$$

仍是齐次线性方程组的基础解系的充分必要条件是 $|A| = |a_{ij}| \neq 0 (i, j = 1, 2 \cdots, r)$.

第四章　方阵的特征根与方阵的对角化

§1　方阵的特征多项式、特征根与最小多项式

基本概念与结论

一、特征多项式及凯莱定理

1. 设 $A=(a_{ij})\in P^{n\times n}$，$\lambda$ 是一个文字，称矩阵

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{pmatrix}$$

为 A 的**特征矩阵**；称行列式 $|\lambda E-A|$ 为 A 的**特征多项式**，记作 $f(\lambda)$.

2. n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是数域 P 上的一个 n 次多项式，且

$$f(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$

$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 叫做 A 的**迹**，记为 $\mathrm{Tr}A$.

3. **哈密顿-凯莱定理**　设 $A=(a_{ij})\in P^{n\times n}$，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式，则 $f(A)=A^n-(a_{11}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|E=0$.

二、特征根及其性质

1. n 阶矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在复数域 C 内的根叫矩阵 A 的**特征根**.

2. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的全部特征根，则　$\mathrm{Tr}A=\lambda_1+\lambda_2$

$+\cdots+\lambda_n$，$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

3. 设 A 是复数域 C 上一个 n 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征根.（1）如果 A 可逆，那么 $\lambda_i\neq 0(i=1,\cdots,n)$，且 $\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1}的全部特征根（证明见例 3）.（2）如果 $f(x)$是 C 上任意次数大于零的多项式，那么 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$是 $f(A)$的全部特征根（证明见例 5）.

4. 实对称阵的特征根全是实数.

三、特征向量及特征子空间

1. 设 λ 是 n 阶矩阵 A 的一个特征根，则齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$（其中 X 是 n 维列向量）的一个非零解称为 A 的属于特征根 λ 的一个**特征向量**.

2. λ_0 是 n 阶方阵 A 的特征根的充分必要条件是：存在 n 维列向量 $X\neq 0$，使 $AX_0=\lambda_0X_0$.

3. n 阶方阵 A 的属于特征根 λ_0 的所有特征向量及零向量组成的集合是 C^n 的一个子空间，称为 A 的属于特征根 λ_0 的**特征子空间**，记作 V_{λ_0}.

显然，V_{λ_0}就是齐次线性方程组$(\lambda_0E-A)X=0$ 的解空间.

4. 属于不同特征根的特征向量线性无关.

5. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是 n 阶方阵 A 的不同的特征根，而 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots$ α_{ir_i}是属于特征根 λ_i 的线性无关的特征向量$(i=1,2,\cdots,t)$，则向量组 $\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots\alpha_{t1},\alpha_{t2},\cdots,\alpha_{tr_t}$也线性无关.

四、最小多项式

1. 设$A\in P^{n\times n}$，$m(\lambda)$是数域P上首1（首项系数为1）的多项式，$g(\lambda)\in P[\lambda]$，如果 $m(\lambda)$满足下列条件：

（1）$m(A)=0$，

（2）若 $g(A)=0$，则必有 $\partial(m(\lambda))\leqslant\partial(g(\lambda))$，

那么称 $m(\lambda)$是 A 的**最小多项式**。

2. 设 $A\in P^{n\times n}$，$f(\lambda)\in P[\lambda]$，如果 $f(A)=0$，那么称 $f(\lambda)$是 A 的

零化多项式. 于是 A 的最小多项式是 A 的零化多项式中首项系数是 1(简称首 1)且次数最低者.

3. 方阵 A 的最小多项式存在且唯一.

4. 如果 $m(\lambda)$是方阵 A 的最小多项式,$A\in P^{n\times n}$,$g(\lambda)\in P[\lambda]$,那么 $g(A)=0$ 的充分必要条件是 $m(\lambda)\mid g(\lambda)$. 特别地,如果 $f(\lambda)$是 A 的特征多项式,那么 $m(\lambda)\mid f(\lambda)$.

应用举例

一、特征根与特征向量

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

是一个 n 阶方阵,求 A 的全部特征根.

解

$$\because \quad |\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^n-1$$

$\therefore$ A 的特征根是 n 次单位根,它们是

$$\omega_0=1,\omega_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\cdots,$$

$$\omega_{n-1}=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

例 2 试求 n 阶实方阵

$$A = a^2\begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

的特征根(其中 $0<b\leqslant 1, a^2>0$),并证明:$\lambda=a^2[1+(n-1)b]$是 A 的最大特征根.

解
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a^2 & -a^2b & \cdots & -a^2b \\ -a^2b & \lambda-a^2 & \cdots & -a^2b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a^2b & -a^2b & \cdots & \lambda-a^2 \end{vmatrix}$$

从第一行开始,每行减去相邻的后一行,得

$$\begin{vmatrix} \lambda-a^2+a^2b & -\lambda+a^2-a^2b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda-a^2+a^2b & -\lambda+a^2-a^2b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a^2b & -a^2b & -a^2b & \cdots & \lambda-a^2 \end{vmatrix}$$

从第一列开始,每列加到相邻的后一列,得

$$\begin{vmatrix} \lambda-a^2+a^2b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda-a^2+a^2b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a^2+a^2b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a^2b & 2(-a^2b) & 3(-a^2b) & \cdots & \lambda-a^2-(n-1)a^2b \end{vmatrix}$$

$$\therefore\quad |\lambda E-A|=(\lambda-a^2+a^2b)^{n-1}[\lambda-a^2-(n-1)a^2b]$$
$$=[\lambda-a^2(1-b)]^{n-1}[\lambda-a^2(1+(n-1)b)]$$

因此,A 的全部特征根是:

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=a^2(1-b),\lambda_n=a^2[1+(n-1)b]$$

再证 $a^2[1+(n-1)b]>a^2(1-b)$. $\because a^2>0$,$\therefore$只须证 $1+(n-1)b>1-b$. 事实上,$\because 0<b\leqslant 1$ $\therefore 0\leqslant 1-b<1$,因而,$1+(n-1)b$

$>1-b$.

如例 1、例 2 所示，求矩阵 A 的特征根，只须求出矩阵 A 的特征多项式在复数域 C 中的根，它归结为 n 阶行列式的计算及求 n 次多项式的根，但对某些特殊矩阵 A，常常用特征根与特征向量的关系式 $AX=\lambda X$，(X 是非零的 n 维列向量)就能较为简便地估计出特征根的范围或者求得其特征根，有时又只须论证λ_i是多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$之根即可.

例 3 试证：

(1)幂等阵($A^2=A$)的特征根只能是 0 或 1；

(2)幂零阵(存在整数 m 使 $A^m=0$)的特征根只能是 0；

(3)对合阵($A^2=E$)的特征根只能是 1 或-1；

(4)反对称实数矩阵($A'=-A$)的特征根是零或纯虚数；

(5)可逆矩阵的特征根均不为 0，且如果 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是可逆阵 A 的全部特征根，则 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1}的全部特征根.

证明 (1)由题设条件 $A^2=A$，设 λ 是 A 的任一个特征根，则存在 n 维列向量 $X\neq 0$ 使 $AX=\lambda X$. 于是

$$A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda(AX)=\lambda(\lambda X)=\lambda^2X$$

又 $A^2X=AX=\lambda X$，所以，$\lambda^2X=\lambda X$. 即$(\lambda^2-\lambda)X=0$. 但 $X\neq 0$，故 $\lambda^2-\lambda=0$. 从而 $\lambda=0$ 或 1.

(2)，(3)的证明与(1)类似.

(4)设 λ 是 A 的特征根，则存在 n 维列向量 $X\neq 0$ 使 $AX=\lambda X$，从而有$\overline{\lambda X'}=\overline{X'}\,\overline{A'}=-\overline{X'}A$，于是 $\overline{\lambda X'}X=-\overline{X'}AX=-\lambda\overline{X'}X$，因此有$(\bar{\lambda}+\lambda)\overline{X'}X=0$，而$\overline{X'}X\neq 0$，故$\bar{\lambda}+\lambda=0$，因此推出 $\lambda=0$ 或 $\lambda=bi$.

(5)因为$|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\cdots\lambda_n$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征根，所以当$|A|\neq 0$ 时，$\lambda_i\neq 0\quad(i=1,\cdots,n)$.

再证 A^{-1}的全部特征根是 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$. 由 § 2 例 2 知存在可逆矩阵 T 使 $T^{-1}AT=B$.

$$B=\begin{pmatrix}\mu_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \mu_2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n\end{pmatrix}$$

（其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的一个排列）. 由此得

$$(T^{-1}AT)^{-1}=T^{-1}A^{-1}T=B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\mu_1} & * & \cdots & * \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\mu_n}\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{\mu_1},\frac{1}{\mu_2},\cdots,\frac{1}{\mu_n}$ 是 A^{-1}的全部特征根. 而 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的一个排列,所以 A^{-1}的全部特征根是 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$.

例 4 设 A 是 n 阶方阵, $f(x)$ 是常数项不为零的多项式,且 $f(A)=0$,试证 A 的特征根全不为零.

分析 注意到 A 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 适合: $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$,要证 $\lambda_i\neq 0(i=1,\cdots,n)$,仅须证 A 可逆即可.

证明 设 $f(t)=a_tx^t+\cdots+a_1x+a_0\ (a_0\neq 0)$, 且 $f(A)=a_tA^t+\cdots+a_1A+a_0E=0$, 所以 $-a_tA^t-\cdots-a_1A=a_0E$. 从而 $(-\frac{a_t}{a_0}A^{t-1}-\cdots-\frac{a_1}{a_0}E)A=E$. 由可逆定义知 A 可逆. 于是 $|A|\neq 0$,而 $|A|=\lambda_1\cdots\lambda_n$,故 $\lambda_i\neq 0(i=1\cdots n)$.

例 5 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶矩阵 A 的 n 个特征根(重根按重数计), $g(x)$ 是任一次数大于零的多项式,证明:

(1) $g(A)$ 的 n 个特征根是 $g(\lambda_1),g(\lambda_2),\cdots,g(\lambda_n)$;

(2) A 的属于特征根 λ_i 的特征向量是 $g(A)$ 的属于 $g(\lambda_i)$ 的特征向量.

分析 为了证明(1)只须证 $g(\lambda_1),\cdots,g(\lambda_n)$ 是 $|\lambda E-g(A)|$ 的全部根，因而可先考查多项式 $\lambda-g(x)$.

证明 (1)设 $g(x)$ 的次数为 m，且 m 次多项式 $G(x)=\lambda-g(x)$ 的根是 $x_1,x_2,\cdots,x_m$(其中 λ 是任意的数)，则 $G(x)=b_0\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)$，以 A 代 x，并取行列式得

$$|\lambda E-g(A)|=|b_0\prod_{i=1}^{m}(A-x_iE)|=b_0^n\prod_{i=1}^{m}|A-x_iE|$$

因为 $|A-\lambda E|=\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j-\lambda)$，故 $|\lambda E-g(A)|=b_0^n\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j-x_i)=\prod_{j=1}^{n}[b_0\prod_{i=1}^{m}(\lambda_j-x_i)]=\prod_{j=1}^{n}G(\lambda_j)=\prod_{j=1}^{n}(\lambda-g(\lambda_j))$

所以 $g(A)$ 的特征根是 $g(\lambda_1),g(\lambda_2),\cdots,g(\lambda_n)$.

(2)设 X 是 A 的属于特征根 λ_i 的特征向量，则 $AX=\lambda_iX$，对一切自然数 k 都有 $A^kX=\lambda^kX$，于是 $g(A)X=(b_mA^m+b_{m-1}A^{m-1}+\cdots+b_1A+b_0E)X=b_n\lambda_i^mX+b_{m-1}\lambda_i^{m-1}X+\cdots+b_1\lambda_iX+b_0X=g(\lambda_i)X$

所以 X 是 $g(A)$ 的属于特征根 $g(\lambda_i)$ 的一个特征向量.

例 5 的结论是重要的，看下例.

例 6 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意复数，行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

叫做一个**循环行列式**. 证明

$$D=f(\omega_1)f(\omega_2)\cdots f(\omega_n)$$

这里 $f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$，而 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 是全部 n 次单位根.

分析 先证

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} = f(A)$$

A 是某一个 n 阶矩阵,且 A 的特征根是 n 次单位根 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$. 再利用例 5 的结果即可.

证明 由

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} = a_1E + a_2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ a_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} = a_1E + a_2A + a_3A^2 + \cdots + a_nA^{n-1}$$

取 $f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$，则有

$$f(A) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

显然，矩阵 A 的特征根是 n 次单位根 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，由例 5 得

$$D=|f(A)|=f(\omega_1)f(\omega_2)\cdots f(\omega_n).$$

例 7 求下列矩阵的特征根和相应的特征向量.

$$(1)A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

解 (1)因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^3(\lambda+2)$$

所以 A 的特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\lambda_4=-2$.

当特征根是 2 时，齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的基础解系为$(1,1,0,0)'$，$(1,0,1,0)'$，$(1,0,0,1)'$故属于特征根2的一切特征向量为$k_1(1,1,0,0)'+k_2(1,0,1,0)'+k_3(1,0,0,1)'=(k_1+k_2+k_3,k_1,k_2,k_3)'$其中$k_1,k_2,k_3$是不全为0的数.

当特征根是-2时，齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的基础解系为$(1,-1,-1,-1)'$，故属于特征根-2的一切特征向量是$k(1,-1,-1,-1)'=(k,-k,-k,-k)'$，其中$k\neq 0$.

(2)A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -a \\ a & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+a^2=(\lambda-ia)(\lambda+ia)$$

故A的特征根为$\lambda_1=ia$，$\lambda_2=-ia$.

当$a\neq 0$时，对特征根ia齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} ia & -a \\ a & ia \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的基础解系为$(1,i)'$，于是，A的属于特征根ia的一切特征向量为$(k,ik)'$，其中$k\neq 0$.

对特征根$-ia$齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} -ia & -a \\ a & -ia \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的基础解系为$(1,-i)'$，于是A的属于特征根$-ia$的一切特征向量为$(k,-ik)$，其中k是不为0的数.

当$a=0$时，特征根$\lambda_1=\lambda_2=0$，此时，任意$X=(x_1,x_2)'\neq 0$，$(x_1,x_2\in C)$都是A的特征向量.

由例7可以看出，求特征向量可归结为解一个齐次线性方程组.

例8 设 X 是矩阵 A 属于特征根 λ 的特征向量，试求 $P^{-1}AP$ 属于 λ 的一个特征向量.

分析 Y 是 $P^{-1}AP$ 的属于 λ 的特征向量的充分必要条件是 PY 是 A 的属于 λ 的特征向量，故求 $P^{-1}AP$ 属于 λ 的一个特征向量 Y，只须取 PY 为 A 的一个特征向量.

证明 易证 λ 是 $P^{-1}AP$ 的特征根，由题设 X 是 A 的属于 λ 的一个特征向量，令 $PY=X$，得 $Y=P^{-1}X$

∵ $(P^{-1}APY=P^{-1}AP(P^{-1}X)=P^{-1}AX=P^{-1}\lambda X=\lambda P^{-1}X=\lambda Y$

∴ $Y=P^{-1}X$ 是 $P^{-1}AP$ 的属于 λ 的特征向量.

例9 (1)设 λ_1,λ_2 是 n 阶方阵 A 的两个不同的特征根，X_1,X_2 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明 X_1+X_2 不是 A 的特征向量.

(2)如果 A 以任何一个非零 n 维列向量作为它的特征向量，则 A 是一个数量矩阵.

证明 (1)由已知条件 $AX_1=\lambda_1X_1,AX_2=\lambda_2X_2$，如果 X_1+X_2 是 A 的一个特征向量，那么，$A(X_1+X_2)=\lambda(X_1+X_2)$，其中 λ 是 A 的一个特征根. 从而 $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2=\lambda X_1+\lambda X_2$，即 $(\lambda_1-\lambda)X_1+(\lambda_2-\lambda)X_2=0$，但 X_1,X_2 线性无关，故 $\lambda_1-\lambda=0,\lambda_2-\lambda=0$. 由此得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾，所以 X_1+X_2 不是 A 的特征向量.

(2)设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征根，首先证明 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$. 如果存在 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$，设 X,Y 是分别属于 λ_i,λ_j 的特征向量，则 $AX=\lambda_iX,AY=\lambda_jY$ 且 $X+Y\neq0$(若 $X+Y=0$，则 $X=-Y$. 由此推得 $\lambda_i=\lambda_j$，与 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 矛盾). 由(1)知 $X+Y$ 不是 A 的特征向量，与题设条件矛盾，所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$.

令 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=k$ 并取 $X_i=(0,\cdots,\overset{(i)}{1},\cdots,0)'$ 由题设条件得 $AX_i=kX_i(i=1,\cdots,n)$. 由此得 $A=kE$.

二、特征多项式和凯莱定理

例10 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 则 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=\lambda^n-s_1\lambda^{n-1}+s_2\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}\lambda+(-1)^ns_n$ 其中 s_k 是 A 的所有 k 阶主

子式(即行指标与列指标相同的 k 阶子式)之和.

证明 由行列式性质,将特征多项式展开成 2^n 个 n 阶行列式的和,即

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & 0-a_{12} & \cdots & 0-a_{1n}\\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & 0-a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0-a_{n1} & 0-a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=|\lambda E|+\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots\leqslant i_k\leqslant n}D(i_1,\cdots,i_k)\Big).$$

这里,$D(i_1,\cdots,i_k)$表示 n 阶行列式,它的第 $i_1,\cdots,i_k$ 列分别是 $-A$ 的第 $i_1,\cdots,i_k$ 列,而其余的 $n-k$ 个列(当 $k<n$ 时)分别是纯量矩阵 λE 的相应的列. 易知

$$D(i_1,\cdots,i_k)=(-1)^k\lambda^{n-k}\Delta(i_1,\cdots,i_k)$$

这里,$\Delta(i_1,\cdots,i_k)$是从 A 中取其第 $i_1,\cdots,i_k$ 列和第 $i_1,\cdots,i_k$ 行而成的 k 阶主子式,于是

$$f(\lambda)=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}(-1)^k\cdot\lambda^{n-k}\cdot\Delta(i_1,\cdots,i_k)\Big)$$

$$=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot s_k\cdot\lambda^{n-k}$$

式中 s_k 是 A 的一切 k 阶主子式的和.

例 10 给出了特征多项式的展开式. 用这个展开式可求某些矩阵的特征多项式.

例 11 求方阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1\end{pmatrix}$$

的特征多项式($n\geqslant2$).

分析 利用特征多项式的展开式,关键是求 $s_k(k=1,2,\cdots,n)$.

解 从$|A|$的最后一列开始,每列减去相邻的前一列,得

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\2&1&1&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

容易看出,秩 $A=2$. 所以,当 $k\geqslant 3$ 时,$s_k=0$. 因此,特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^n-s_1\lambda^{n-1}+s_2\lambda^{n-2}$,$s_1=\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$. 再计算 s_2,取 A 的第 k 行,第 $k+i$ 行,第 k 列,第 $k+i$ 列,得二阶主子式为:

$$\begin{vmatrix}2k-1&2k-1+i\\2k-1+i&2k-1+2i\end{vmatrix}=-i^2$$

$$(k=1,2,\cdots,n\text{-}1,i=1,\cdots,n\text{-}k)$$

于是,$-s_2=\sum\limits_{i=1}^{n-1}i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-2}i^2+\cdots+1^2$

$$=\frac{1}{6}[(n-1)n(2n-1)+(n-2)(n-1)(2n-3)+\cdots+2\cdot 3\cdot 5+1\cdot 2\cdot 3]$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{n^2(n-1)(n+1)}{2}$$

所以,所求的特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^n-n^2\lambda^{n-1}-\frac{n^2(n-1)(n+1)}{12}\lambda^{n-2}$$

例 12 试证

(1)如果 A、B 是两个 n 阶方阵,则 AB 与 BA 有相同的特征多项式;

(2)(西尔威斯特定理)如果 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,其中 $m<n$,那么 $\lambda^n|\lambda E-AB|=\lambda^m|\lambda E-BA|$.

证明 (1)证法一 若 A 是可逆的,则 $BA=A^{-1}(AB)A$. 于是

$$|\lambda E - BA| = |\lambda E - A^{-1}(AB)A| = |A^{-1}(\lambda E - AB)A| = |\lambda E - AB|$$

即 AB 与 BA 有相同的特征多项式.

若 A 不可逆，因为 A 至多有 n 个不同的特征根，所以存在实数 t_0，当 $t>t_0$ 时，都有 $|A-tE|\neq 0$，故 $A-tE$ 是可逆阵. 于是，$B(A-tE)$ 与 $(A-tE)B$ 有相同的特征多项式，即

$$|\lambda E - B(A-tE)| = |\lambda E - (A-tE)B|$$

也就是 $|(\lambda E - BA) + tB| = |(\lambda E - AB) + (tB)|$

对每一个固定的 λ 值，上式两端是两个关于 t 的次数不超过 n 的多项式，当 $t>t_0$ 时，它们的值相等. 由于 t 的个数大于 n，所以，上述两个关于 t 的多项式恒等，当 $t=0$ 时，得

$$|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$$

即 AB 与 BA 有相同的特征多项式.

证法二 根据分块矩阵的乘法，可得

$$\begin{bmatrix} E_n & -A \\ 0 & \lambda E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \lambda E_n \\ E_n & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda E_n - AB \\ \lambda E_n & \lambda B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ -B & \lambda E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \lambda E_n \\ E_n & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \lambda E_n \\ \lambda E_n - BA & 0 \end{bmatrix}$$

两边取行列式，得

$$\lambda^n \begin{vmatrix} A & \lambda E_n \\ E_n & B \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n |\lambda E_n - AB|$$

$$\lambda^n \begin{vmatrix} A & \lambda E_n \\ E_n & B \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n |\lambda E_n - BA|$$

当 $\lambda \neq 0$ 时，有 $|\lambda E_n - AB| = |\lambda E_n - BA|$.

当 $\lambda = 0$ 时，因 $|AB| = |BA|$，故也有 $|\lambda E_n - AB| = |\lambda E_n - BA|$.

(2)当 $m<n$ 时，用 0 把 A、B 补成 n 阶矩阵即

$$A_1 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, B_1 = (B \quad 0),$$

于是

$$A_1B_1=\begin{bmatrix}A\\0\end{bmatrix}(B\quad 0)=\begin{bmatrix}AB&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$B_1A_1=(B\quad 0)\begin{bmatrix}A\\0\end{bmatrix}=BA$$

$$|\lambda E-A_1B_1|=\begin{vmatrix}\lambda E-AB&0\\0&\lambda E_{n-m}\end{vmatrix}=\lambda^{n-m}|\lambda E-AB|$$

$$|\lambda E-B_1A_1|=|\lambda E-BA|$$

由(1)的结果知上式左端相等，所以 $|\lambda E-BA|=\lambda^{n-m}|\lambda E-AB|$，即

$$\lambda^n|\lambda E-AB|=\lambda^m|\lambda E-BA|$$

利用例 12 的结果常常可以简化特征多项式的计算，因而容易求得其特征根，下面举例说明.

例 13 已知 $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$，a_i 是实数，

$$A=\begin{bmatrix}a_1^2+1&a_1a_2+1&\cdots&a_1a_n+1\\a_2a_1+1&a_2^2+1&\cdots&a_2a_n+1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_na_1+1&a_na_2+1&\cdots&a_n^2+1\end{bmatrix}$$

求 A 的特征根.

解 容易看出 $A=\begin{bmatrix}a_1&1\\a_2&1\\\cdots&\cdots\\a_n&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$，令 $B=\begin{bmatrix}a_1&1\\a_2&1\\\cdots&\cdots\\a_n&1\end{bmatrix}$，

由西尔威斯特定理 $|\lambda E-A|=|\lambda E-BB'|=\lambda^{n-2}|\lambda E-B'B|$

$$B'B=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_i^2&\sum_{i=1}^{n}a_i\\\sum_{i=1}^{n}a_i&n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_i^2&0\\0&n\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-B'B|=\begin{vmatrix}\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2 & 0\\ 0 & \lambda-n\end{vmatrix}$$

于是 $|\lambda E-A|=\lambda^{n-2}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\lambda-n)$

所以 A 的特征根为：$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-2}=0,\lambda_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,\lambda_n=n$.

例 14 任何 n 阶方阵 A 的高次幂 $A^s(s\geqslant n)$ 或者等于 0，或者可以表为 A 的次数不超过 $n-1$ 的多项式. 当 A 可逆时，命题对 A^{-1} 也成立.

证明 设 A 的特征多项式

$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}\lambda+(-1)^na_n$

用 $f(\lambda)$ 去除 λ^s，得 $\lambda^s=f(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$，其中 $r(\lambda)=0$ 或 $\partial(r(\lambda))<\partial(f(\lambda))$. 如果 $r(\lambda)=0$，此时 $\lambda^s=f(\lambda)q(\lambda)$，于是 $A^s=f(A)q(A)=0$；如果 $\partial(r(\lambda))<\partial(f(\lambda))$，此时 $A^s=f(A)q(A)+r(A)=r(A)$，其中 $r(A)$ 是 A 的次数不超过 $n-1$ 的多项式，所以命题的前半部成立.

当 A 可逆时，$a_n=|A|\neq0$，由凯莱定理有

$$f(A)=A^n-a_1A^{n-1}+\cdots+(-1)^na_nE=0$$

得 $$\frac{(-1)^{n+1}}{a_n}(A^{n-1}-a_1\cdot A^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}E)A=E$$

由此看出，$A^{-1}=\frac{(-1)^{n+1}}{a_n}(A^{n-1}-a_1A^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}E)$ 是 A 的某一个 n-1 次多项式.

例 15 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，计算 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4E$.

分析 应用凯莱定理将欲计算的式子的次数降低，再计算 A 的多项式或 A 的高次幂.

解 A 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda+1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-2\lambda+1$$

用 $f(\lambda)$除 $2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4$ 得

$2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4=(2\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-14)(\lambda^3-2\lambda+1)+(24\lambda^2-37\lambda+10)$. 将 A 代入等式两端,由凯莱定理有 $f(A)=(A^3-2A+E)=0$. 于是

$$2A^8-3A^5+A^4+A^2-4E=24A^2-37A+10E$$

$$=24\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^2-37\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 48 & -26\\ 0 & 95 & -61\\ 0 & -61 & 34\end{pmatrix}$$

例 16 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

证明,当 $n\geqslant 3$ 时,有 $A^n=A^{n-2}+A^2-E$,并求 A^{100}.

证明 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$$

由凯莱定理,$f(A)=A^3-A^2-A+E=0$,由此得$A^3=A^2+A-E$. 所以 $n=3$ 时,等式 $A^n=A^{n-2}+A^2-E$ 成立.

假定等式 $A^n=A^{n-2}+A^2-E$ 对 $n-1$ 成立,即有

$$A^{n-1}=A^{n-3}+A^2-E$$

两边同乘以 A,得

$$A^n=A^{n-2}+A^3-AE$$

又 $A^3=A^2+A-E$，把 A^3 代入上式得：

$$A^n=A^{n-2}+A^2+A-E-AE=A^{n-2}+A^2-E$$

即上式对 n 也成立. 于是上式对一切≥3 的自然数 n 真.

根据以上等式，有

$$A^{100}=A^{98}+(A^2-E)=A^{96}+2(A^2-E)=A^{94}+3(A^2-E)=\cdots=A^2+49(A^2-E)$$

而 $A^2+49(A^2-E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}$，所以 $A^{100}=\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}$

三、特征多项式与最小多项式

例 17 设 $m(\lambda)$ 是 n 阶方阵 A 的最小多项式，证明 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 整除 $[m(\lambda)]^n$.

证明 设 $m(\lambda)=\lambda^r+c_1\lambda^{r-1}+\cdots+c_{r-1}\lambda+c_r$，考虑下列矩阵

$$\begin{aligned}B_0&=E\\B_1&=A+c_1E\\B_2&=A^2+c_1A+c_2E\\&\cdots\cdots\\B_{r-1}&=A^{r-1}+c_1A^{r-2}+\cdots+c_{r-1}E\end{aligned}\qquad(1)$$

令 $B(\lambda)=\lambda^{r-1}B_0+\lambda^{r-2}B_1+\cdots+\lambda B_{r-2}+B_{r-1}$

则 $(\lambda E-A)\cdot B(\lambda)=(\lambda^rB_0+\lambda^{r-1}B_1+\cdots+\lambda^2B_{r-2}+\lambda B_{r-1})-(\lambda^{r-1}AB_0+\lambda^{r-2}AB_1+\cdots+AB_{r-1})$

$$=\lambda^rB_0+\lambda^{r-1}(B_1-AB_0)+\lambda^{r-2}(B_2-AB_1)+\cdots+\lambda(B_{r-1}-AB_{r-2})-AB_{r-1}$$

但 $-AB_{r-1}=c_rE-(A^r+c_1A^{r-1}+\cdots+c_{r-1}A+c_rE)$

$$=c_rE-m(A)=c_rE$$

又由(1)，$B_0=E,B_1-AB_0=c_1E,B_2-AB_1=C_2E,\cdots,B_{r-1}-AB_{r-2}=c_{r-1}E$

故 $(\lambda E-A)\cdot B(\lambda)=\lambda^rE+C_1\lambda^{r-1}E+C_2\lambda^{r-2}E+\cdots+c_{r-1}\lambda E+c_rE$

$$=m(\lambda)E$$

上式两边取行列式，得 $|\lambda E-A|\cdot|B(\lambda)|=|m(\lambda)E|=[m(\lambda)]^n$ 而 $|B(\lambda)|$ 是 λ 的多项式，所以 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 整除 $[m(\lambda)]^n$.

本例也可用第五章中 A 的不变因子与 A 的特征多项式及 A 的最小多项式间的关系来证明，且证明方法更简单(见第五章 §2 例 3).

例 18 证明矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m(\lambda)$ 有相同的不可约因式.

证明 设 $p(\lambda)$ 是不可约多项式，如果 $p(\lambda)|m(\lambda)$，因为 $m(\lambda)|f(\lambda)$，所以 $p(\lambda)|f(\lambda)$. 由例 17 $f(\lambda)|[m(\lambda)]^n$，于是 $p(\lambda)|[m(\lambda)]^n$，但 $p(\lambda)$ 不可约，由不可约多项式的性质有 $p(\lambda)|m(\lambda)$.

本例的结果只是说特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m(\lambda)$ 有相同的不可约因式，并不是说 $f(\lambda)=m(\lambda)$. 但如果 $f(\lambda)$ 的不可约因式都是单因式，那么 $f(\lambda)$ 就等于 $m(\lambda)$ 了。

例 19 求下列矩阵的特征多项式和最小多项式：

$$(1)A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad(2)A=\begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&-1&1&3\\0&0&2&5\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

解 (1)

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

由例 18 知，A 的最小多项式一定含有因式 $\lambda-1$ 与 $\lambda+1$. 故 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 形如 $(\lambda+1)^k(\lambda-1)^s$，其中 k,s 为正整数. 又因为

$$(A-E)(A+E)=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $m(\lambda)|(\lambda-1)(\lambda+1)$. 这只有 $k=s=1$，即 A 的最小多项式

为 $m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)$.

(2)

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & -1 & -2\\ 0 & \lambda+1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

所以 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 含有因式 $\lambda-1,\lambda+1,\lambda-2$，于是得 $m(\lambda)=(\lambda-1)^k(\lambda+1)^r(\lambda-2)^s$. 但 $m(\lambda)\mid(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2$，故 $k=r=1,1\leqslant s\leqslant 2$，但 $(A-E)(A+E)(A-2E)\neq 0$，而 $f(A)=(A-E)(A+E)(A-2E)^2=0$，所以 $s=2$，而 $m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2$.

§2　方阵与对角阵相似的一个充要条件

基本概念与结论

一、方阵相似的定义及性质

1. 设 A、$B\in P^{n\times n}$，若存在可逆阵 $X\in P^{n\times n}$ 使得 $B=X^{-1}AX$，则称 B 与 A **相似**，或称 A 相似于 B，记作 $A\sim B$.

2. n 阶矩阵的相似关系具有以下性质：(1)反身性；(2)对称性；(3)传递性.

3. 相似矩阵有相同的特征多项式.

注意　特征多项式相同的两个矩阵未必相似. 例如，

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

它们的特征多项式都是 $(\lambda-1)^2$，但 E 与 B 不相似，因为，与 E 相似的矩阵只能是 E.

4. 任何 n 阶复方阵 A 必相似于上三角阵，即存在 n 阶可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征根.（证明见本节例 2).

二、方阵 A 与对角矩阵相似的一个充要条件

1. 设 $A\in P^{n\times n}$，如果存在可逆矩阵 $X\in P^{n\times n}$，使 $X^{-1}AX$ 为对角形矩阵，那么就说矩阵 A **可以对角化**.

2. 设 $A\in P^{n\times n}$，如果 A 的特征多项式在 P 内有 n 个单根，那么 A 可以对角化.

注意 这只是可以对角化的充分条件，而不是必要条件.

3. 设 $A\in P^{n\times n}$，则 A 可对角化的充分必要条件是：

(1) A 的特征根都在数域 P 内，

(2) 对 A 的每个特征根 λ，有

$$n-\text{秩}(\lambda E-A)=k$$

其中 k 是 λ 的重数.

条件(2)也可改述为：特征根 λ 的重数等于齐次线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 的基础解系所含向量个数（简称为代数重数等于几何重数).

条件(2)还可改述为：令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 A 的所有不同的特征根，有 $\sum\limits_{i=1}^{r}[n-\text{秩}(\lambda_iE-A)]=n$，即属于 A 的不同特征根的线性无关的特征向量总数是 n.

4. 设 $A\in P^{n\times n}$，求可逆矩阵 $X(\in P^{n\times n})$ 使 $X^{-1}AX$ 为对角矩阵的步骤是：

(1) 求矩阵 A 的全部特征根；

(2)如果 A 的特征根都在数域 P 内(否则 A 不可对角化),那么对每个特征根 λ,求出齐次线性方程组

$$(\lambda E - A)X = 0 \tag{1}$$

的一个基础解系.

(3)如果对每个特征根 λ,(1)的基础解系所含解向量个数等于 λ 的重数(否则 A 不可对角化),那么 A 可对角化,以所有基础解系中的向量为列即得 n 阶可逆阵 X,且 $X^{-1}AX$ 是对角阵,而对角线上的元素是 A 的全部特征根.

应用举例

一、方阵的相似

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & x & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & y & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

问 x,y 取何值时,A 与 B 相似?

分析 本题要求找出 x,y 所满足的条件,为此,可先假定 A 与 B 相似来导出必要条件.

解 设 A,B 相似,则存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=B$,从而 $|A|=|B|$,但 $|A|=-(x-y)^2$,$|B|=0$,所以 $(x-y)^2=0$,故 $x=y$.

又由于相似矩阵有相同的特征多项式,所以,$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$,于是 $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-2\lambda x^2=(\lambda-1)(\lambda-2)\lambda$,由此得 $x=0$,故 $y=0$. 即 A 与 B 相似的必要条件是 $x=y=0$.

反之,当 $x=y=0$ 时, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

有三个不相等的特征根 0,1,2. 所以,A 相似于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

故当且仅当 $x=y=0$ 时，A 与 B 相似.

例 2 任何 n 阶复方阵必相似于三角阵，即存在 n 阶可逆阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

证明 对 n 用归纳法，当 $n=1$ 时，命题显然成立. 假设 $n-1$ 时，命题成立，考虑 n 的情形. 取 A 的一个特征根 λ_1，设 $X_1\neq 0$ 是 A 的属于 λ_1 的特征向量，则

$$AX_1=\lambda_1 X_1 \tag{2}$$

X_1 线性无关，必存在 n 维列向量 $X_2,X_3,\cdots,X_n$ 使 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 维列向量空间 C^n 的一个基，令 $P_1=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，则 $|P_1|\neq 0$，令 $E_1=(1,0,\cdots,0)'$ 容易看出，$X_1=P_1E_1$，把它代入(2)式，得 $AP_1E_1=\lambda_1P_1E_1$，即 $(P_1^{-1}AP_1)E_1=\lambda_1E_1$，这说明，$P_1^{-1}AP_1$ 的第一列为 $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

于是

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

其中 A_1 是 n-1 阶矩阵. 由归纳假设，存在 n-1 阶可逆矩阵 P_2，使

$$P_2^{-1}A_1P_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令
$$P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

则 P 是 n 阶可逆矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}^{-1}P_1^{-1}AP_1\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & P_2^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ 0 & & & \\ \vdots & & P_2^{-1}AP_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

显然，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征根.

例 2 的结果很有用，下面举例说明.

例 3 设 n 阶实方阵 A 的特征根全是实数，且 A 的所有 1 阶主子式之和及所有 2 阶主子式的和全是 0，证明：(1)A 的特征根全为 0；(2)$A^n=0$.

证明 (1)由本章§1 例 10 知 A 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^n-s_1\lambda^{n-1}+s_2\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}\lambda+(-1)^ns_n$，其中 s_k 是 A 的所有 k 阶主子式之和. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征根，由韦达定理得

$$s_1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i, s_2=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j\text{，因 } s_1=s_2=0\text{，故}$$

$$s_1^2-2s_2=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=0$$

但 λ_j 全是实数，所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

(2)由例 2

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}0 & & & *\\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$

故 $$A^n=P\begin{pmatrix}0 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}^n P^{-1}=P\cdot 0\cdot P^{-1}=0.$$

例4 设λ_1是n阶矩阵A的特征多项式$f(\lambda)$的k重根，则$n-$秩$(\lambda_1E-A)\leqslant k$.

证明 已知 λ_1 是 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$的 k 重根，设 $f(\lambda)$的其他根是 $\lambda_{k+1},\cdots,\lambda_n$. 由例 2，存在可逆矩阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & *\\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$P^{-1}(\lambda_1 E-A)P=\lambda_1 E-P^{-1}AP$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_1-\lambda_{k+1} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & \lambda_1-\lambda_n \end{pmatrix}=B$$

B 有一个 $n-k$ 阶子式不为零，秩$(\lambda_1 E-A)=$秩 $B\geqslant n-k$，从而 $n-$秩$(\lambda_1 E-A)\leqslant k$.

我们知道 $n-$秩$(\lambda_1 E-A)$等于齐次线性方程组$(\lambda_1 E-A)X=0$的基础解系所含解向量的个数，即 A 的属于 λ_1 的线性无关的特征向量个数，例 4 说明，λ_1 的几何重数不超过 λ_1 的代数重数.

二、方阵对角化

例 5 下列实数域 R 上的矩阵哪些可对角化？如果可以对角化，求可逆阵 P 使 $P^{-1}AP$ 是对角形.

$$(1)A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix};\quad (2)A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(3)A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 (1)因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

所以 A 的特征根是 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，均属于 R.

当 $\lambda_1=-2$ 时，齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的基础解系是(-1,1,1)′,它的向量个数等于 λ_1 的重数。同样,当 $\lambda_2=1$(二重)时,相应的齐次线性方程组的基础解系是$(-2,1,0)'$,$(0,0,1)'$,其向量个数也等于 λ_2 的重数,故 A 可以对角化.

令 $P=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)因为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$

所以 A 的特征根是 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$ 都属于 R.

但当 $\lambda_1=\lambda_2=-2$ 时,齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的基础解系是(1,1,0)′,向量个数小于特征根(-2)的重数.

所以 A 在 R 上不可以对角化.

(3)因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ 2 & \lambda & -3 \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2+14)$$

A 有两个特征根不在 R 内,所以 A 在实数域 R 上不可以对角化.

(3)中的 A 在复数域内有三个相异的特征根,所以 A 在复数域上可以对角化,由此可知矩阵是否可对角化和讨论的数域有关.

说明 将 n 阶矩阵 A 化为对角形矩阵 $P^{-1}AP$ 时,应注意以下几点:

(1)对角矩阵 $P^{-1}AP$ 的主对角线上的元素是 A 的全部特征根.

(2)可逆矩阵 P 的列是由 A 的全部线性无关的特征向量构成的.

(3)特征根在对角矩阵中的位置与 P 的列向量的位置有关,即如果特征根位于第 i 行第 i 列,那么它相应的特征向量位于 P 的第 i 列,如例 5 中(1)的特征根-2 位于第 1 行第 1 列,则相应的特征向量$(-1,1,1)'$位于 P 的第一列.

例 6 设 $B=AA'$,其中 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$,且 a_i 为非零实数$(i=1,2,\cdots,n)$,A'是 A 的转置矩阵.

(1)证明:$B^k=mB$,并求数 m(k 是正整数).

(2)求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}BP$ 为对角矩阵,并写出对角矩阵.

证明 (1)$B^k=(AA')(AA')\cdots(AA')=A(A'A)\cdots(A'A)A'$

$$=(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{k-1}AA'=(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{k-1}B=mB$$

其中 $m=(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{k-1}$.

(2)为了求 P,我们先求 B 的特征根及其特征向量.由(1)$B^2=(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)B$,由此得 B 的特征根 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

又由 $B=AA'$ 知,$\mathrm{Tr}B=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$,设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 B 的特征根,则 $\mathrm{Tr}B=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$,从而 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$,但 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2>0$,故 λ_i 不全为零,于是 B 有一个特征根是 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2$,所以,B 的特征根是 $\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$, $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$.

再求 B 的特征向量,用例 5 求特征向量的方法,可求得 $B=AA'$的属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量分别为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$,$(-a_2,a_1,0,\cdots,0)'$,$(-a_3,0,a_1,\cdots,0)'$,$(-a_n,0,\cdots,0,a_1)'$.

作可逆矩阵

$$P=\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

把矩阵 A 化为对角矩阵的重要应用之一是计算 A 的高次幂.

例 7 求 A^{100},其中矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

分析 若 A 相似于对角形阵 B,则存在三阶可逆阵 P 使 $A=P^{-1}BP$,且 $A^{100}=P^{-1}B^{100}P$,而 B^{100} 易算,简化了 A^{100} 的计算.

解 因为 A 有三个不同的特征根 1,-3,3,所以 A 可对角化.用例 5 的方法求得可逆矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

使

$$A=P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}P^{-1},$$

其中
$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

于是
$$A^{100}=P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3^{100} & \\ & & 3^{100} \end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3^{101}+3 & 0 & 3^{101}-3 \\ 0 & 2\cdot 3^{101} & 0 \\ 3^{101}-3 & 0 & 3^{101}+3 \end{pmatrix}$$

例 8 求 A^n,其中
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解 用例 5 的方法求得 A 的特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$(二重),属于 λ_1 的线性无关的特征向量是 $(0,-1,-1)'$,属于 $\lambda_2=2$ 的线性无关的特征向量是:$(-1,1,-1)',(1,0,1)'$ 所以 A 可以对角化,令
$$P=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

于是 $A^n=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$
$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 2^n-1 & 2^n & -2^n+1 \\ 2^n-1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

例 9 设 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征根，n 阶方阵 B 与 A 有完全相同的特征根，证明：存在可逆矩阵 D 及另一矩阵 C，使 $A=DC$，$B=CD$.

证明 因为 A,B 有完全相同的特征根，且 n 个特征根互异，所以 A,B 均可对角化且与同一个对角矩阵相似. 因此，A 与 B 相似. 由相似定义，存在可逆矩阵 D，使 $D^{-1}AD=B$. 令 $D^{-1}A=BD^{-1}=C$，则有 $A=DC$，$B=CD$.

例 10 证明：在复数域 C 上，

(1)非零的幂零矩阵不能与对角矩阵相似.

(2)幂等矩阵必相似于对角矩阵

$$
\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

其中 r 是 A 的秩.

(3)对合矩阵必相似于对角矩阵

$$
\begin{bmatrix} E_q & 0 \\ 0 & -E_{n-q} \end{bmatrix}
$$

其中 q 是 A 的特征根 1 的代数重数.

证明 (1)由 § 1 例 3 知，幂零矩阵的特征根是 0，如果幂零矩阵 A 与对角矩阵相似，那么必存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=0$，于是 $A=0$，与 $A\neq 0$ 矛盾，故 A 不与对角矩阵相似.

(2)设 A 是幂等矩阵且秩 $A=r$，由本章 § 1 例 3 知 A 的特征根是 0 或 1，容易证明秩$(E-A)+$秩 $A=n$，故秩$(E-A)=n-r$，于是齐次线性方程组$(E-A)X=0$ 的基础解系所含解向量个数为 $n-$秩$(E-A)=n-(n-r)=r$.

又秩 $A=r$，故齐次线性方程组$(0E-A)X=AX=0$ 的基础解

系所含解向量个数为 $n-$秩 $A=n-r$.

于是 A 共有 $r+(n-r)=n$ 个线性无关的特征向量，而特征根 0,1 均属于 C，所以 A 与对角矩阵相似.

再设 A 的特征根 1,0 的代数重数分别是 s,t，由例 4 知 $s\geqslant n-$秩$(E-A)=r$，$t\geqslant n-$秩 $A=n-r$，且 $s+t=n$. 如果 $s>r$，则 $t<n-r$，这与 $t\geqslant n-r$ 矛盾，故 $s=r$，于是 $t=n-r$. 故 A 相似于对角阵 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3)的证明与(2)类似，首先证明对合矩阵 A 可对角化由 q 是特征根 1 的代数重数，知 $n-q$ 是特征根 -1 的代数重数，因此 A 相似于对角阵$\begin{bmatrix} E_q & 0 \\ 0 & -E_{n-q} \end{bmatrix}$.

例 11 设 $A=(a_{ij})$是一个 n 阶下三角形矩阵，证明：(1)如果 $a_{ii}\neq a_{jj}(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，那么 A 与一个对角矩阵相似；

(2)如果 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，且至少有一个 $a_{i_0j_0}\neq 0(i_0>j_0)$，那么 A 不与对角矩阵相似.

证明 (1)因为 A 是一个 n 阶下三角形矩阵，所以 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda-a_{ii})$，又由于 $a_{ii}\neq a_{jj}(i\neq j)$从而 A 有 n 个不同的特征根 $a_{ii}(i=1,\cdots,n)$. 故 A 与一对角矩阵相似.

(2)A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=(\lambda-a_{11})^n$，于是 A 有 n 重特征根 a_{11}. 又 A 中至少有一个 $a_{i_0j_0}\neq 0(i_0>j_0)$，所以 $a_{11}E-A$ 中至少有一个非零元素. 因此，秩$(a_{11}E-A)\geqslant 1$，齐次线性方程组$(a_{11}E-A)X=0$ 的基础解系所含解向量个数$=n-$秩$(a_{11}E-A)\leqslant n-1$，所以 a_{11}的代数重数与几何重数不相等，故 A 不能与对角矩阵相似.

例 12 设 A 是数域 P 上的 n 阶矩阵，秩 $A=r$，E_n 是 n 阶单位阵，$0\neq k\in P$. 证明下列条件等价：

(1)A 相似于 $k\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(2) $A^2=kA$；

(3) 秩 A+秩$(A-kE_n)=n$.

证明 (1)⇒(2) 由题设，存在可逆阵 P 使 $A=kP\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}$，那么 $A^2=k^2P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}=kA$.

(2)⇒(3) 由 $A(A-kE_n)=A^2-kA=0$ 得

$$n=\text{秩}(kE_n)=\text{秩}(A-(A-kE_n))\leqslant\text{秩}A+\text{秩}(A-kE_n)\leqslant n$$

从而有秩 A+秩$(A-kE_n)=n$.

(3)⇒(1) 设秩 $A=r$. 当 $r=0$ 时，$A=k\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，故(1)成立. 当 $r=n$ 时，秩$(A-kE_n)=0$，$A=kE_n$，故(1)成立. 当 $0<r<n$ 时，$0<$秩$(kE_n-A)=n-r<n$，由 $|kE_n-A|=0$ 知 k 是 A 的特征根，且齐次线性方程组$(kE-A)X=0$ 的基础解系所含向量个数为 r，设为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$. 又由秩 $A=r<n$ 知 $|0E-A|=0$，0 是 A 的特征根，且齐次线性方程组$(0E-A)X=0$ 的基础解系中向量个数为 $n-r$，设为 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$. 又可证明特征根 k 及 0 的代数重数分别为 r 及 $n-r$，于是 A 可对角化且以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为列作矩阵 C，则 $C^{-1}AC=k\begin{bmatrix}E_n & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

例 13 若 n 阶方阵 $A=B^2$，则称 B 是 A 的**平方根**. 设 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$是二阶实矩阵且有两个不相等的实特征根，试证 A 在实数域 R 上有平方根的充要条件是：$|A|\geqslant 0, a+d>0$.

证明 因 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，则 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)$，且 $f(\lambda)$的判别式 $\Delta=(a+d)^2-4(ad-bc)$. 由题设条件 A 有两个不相等的实特征根，设为 λ_1,λ_2，则 $\Delta>0$，且 $a+d=\lambda_1+\lambda_2$.

必要性 设B是A在实数域R上的平方根，则$A=B^2$，于是 $|A|=|B|^2\geqslant 0$，下面只须证 $a+d>0$. 因为 A 有两个不相等的实特征根

λ_1,λ_2,所以 A 与对角矩阵 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}$ 相似. 令 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}$、则 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}=P^{-1}AP=P^{-1}B^2P=(P^{-1}BP)(P^{-1}BP)$,令 $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}$,则 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}b_1^2+b_2b_3 & b_2(b_1+b_4)\\ b_3(b_1+b_4) & b_4^2+b_2b_3\end{bmatrix}$. 由此得 $b_2(b_1+b_4)=b_3(b_1+b_4)=0$. 可以证得 $b_1+b_4\neq 0$,否则若 $b_1+b_4=0$,那么 $\lambda_1-\lambda_2=(b_1^2+b_2b_3)-(b_4^2+b_2b_3)=b_1^2-b_4^2=0$,与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾. 故 $b_2=b_3=0$. 因此 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & \\ & b_4\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}b_1^2 & \\ & b_4^2\end{bmatrix}$. 于是 $\lambda_1=b_1^2\geqslant 0,\lambda_2=b_4^2\geqslant 0$,因此 $a+d=\lambda_1+\lambda_2\geqslant 0$. 但 $a+d\neq 0$,否则,若 $a+d=0$,由 $\Delta>0$ 知 $-4(ad-bc)>0$,从而 $ad-bc<0$,即 $|A|<0$,这与 $|A|\geqslant 0$ 矛盾,所以 $a+d>0$.

充分性　因为 A 有两个不相等的实根 λ_1,λ_2,所以 A 与对角矩阵相似,因而存在可逆阵 P 使 $A=P^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}P$,又由 $a+d=\lambda_1+\lambda_2>0$,且 $\lambda_1\cdot\lambda_2=|A|\geqslant 0$,故 $\lambda_1\geqslant 0,\lambda_2\geqslant 0$. 令

$$B=P^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \\ & \sqrt{\lambda_2}\end{pmatrix}P,\text{则有 } A=P^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \\ & \sqrt{\lambda_2}\end{pmatrix}P\cdot P^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \\ & \sqrt{\lambda_2}\end{pmatrix}P=B^2.$$

B 就是 A 在实数域 R 上的平方根.

例 14　设 A,B 都是 n 阶矩阵,且 $A^2=A,B^2=B,AB=BA$. 证明:存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为对角形矩阵.

证明　由本章§2 例 10 知存在可逆矩阵 P_1,使

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

令 $B_1=P_1^{-1}BP_1=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$,其中 B_{11} 是 r 阶矩阵. 由 $AB=BA$ 得

$B_1\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=P_1^{-1}BP_1\cdot P_1^{-1}AP_1=P_1^{-1}BAP_1=P_1^{-1}ABP_1=P_1^{-1}AP_1\cdot P_1^{-1}BP_1=$

$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B_1$，由此得 $B_{12}=B_{21}=0$，所以 $B_1=\begin{bmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{bmatrix}$.

其次，因 $B_1^2=P_1^{-1}BP_1\cdot P_1^{-1}BP_1=P_1^{-1}B^2P_1=P_1^{-1}BP_1=B_1$，另方面，$\begin{bmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{bmatrix}=B_1=B_1^2=\begin{bmatrix} B_{11}^2 & \\ & B_{22}^2 \end{bmatrix}$. 所以 $B_{11}^2=B_{11}, B_{22}^2=B_{22}$.

因此存在 r 阶可逆矩阵 S_1 及 $n-r$ 阶可逆矩阵 S_2 使

$$S_1^{-1}B_{11}S_1=\begin{bmatrix} E_t & \\ & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2^{-1}B_{22}S_2=\begin{bmatrix} E_u & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

令
$$S=\begin{bmatrix} S_1 & \\ & S_2 \end{bmatrix}$$

则
$$\begin{aligned} S^{-1}B_1S &= \begin{bmatrix} S_1^{-1} & \\ & S_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_1 & \\ & S_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_1^{-1}B_{11}S_1 & \\ & S_2^{-1}B_{22}S_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_t & & & \\ & 0 & & \\ & & E_u & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

令 $P=P_1S$. 则有 $P^{-1}AP=S^{-1}P_1^{-1}AP_1S=S^{-1}\begin{bmatrix} Er & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}S=\begin{bmatrix} S_1^{-1} & \\ & S_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_1 & \\ & S_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$P^{-1}BP=S^{-1}P_1^{-1}BP_1S=S^{-1}B_1S=\begin{bmatrix} E_t & & & \\ & 0 & & \\ & & E_u & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

习　题

1. 设 $f(x)=x^{12}+2x^{11}-2x^{10}-3x^9-8x^8+9x^6-4x^5+x^4-6x^2+11x$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

求　(1)A 的特征根；　　(2)A^{-1}的特征根；

(3)$f(A)$；　　(4)$f(A)$的特征根.

2. 试证：若 A 是 n 阶降秩矩阵，那么伴随矩阵 A^* 的 n 个特征根至少有 $n-1$ 个 0，且非 0 特征根（如果存在）等于$A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$（$A_{ii}$是$A^*$的第 i 行第 i 列元素）.

3. 证明：

(1)正交阵的特征根的模（绝对值）等于 1；

(2)实对称、正交阵的特征根是 1 或 -1；

(3)如果 A,B 是同阶实对称阵，则 $AB-BA$ 的特征根是纯虚数或 0.

4. 设 X,Y 是矩阵 A 的属于不同特征根 λ_1,λ_2 的特征向量，试证：$aX+bY$ $(ab\neq0)$必不是 A 的特征向量.

5. 若 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$的每行元素之和都是 a，试证：

(1)a 是 A 的一个特征根；

(2)对于任意自然数 m，A^m 的每行元素之和都是 a^m.

6. 设 A 是二阶方阵，试证：若有方阵 B 使 $AB-BA=A$，则 $A^2=0$.

7. 设 $m(\lambda)$是方阵 A 的最小多项式，$g(\lambda)$是一多项式，$d(\lambda)$是 $m(\lambda)$与 $g(\lambda)$的最大公因式，其首项系数为 1. 证明：

(1)秩$(d(A))=$秩$(g(A))$；

(2)$g(A)$可逆的充要条件是 $g(\lambda)$与 $m(\lambda)$互素.

8. 设 A 与 B 是同阶实方阵，证明：

(1)$AB+B$ 与 $BA+B$ 有相同的特征根；

(2)如果 $AB=(B-A')A$，则 $A=0$.

9. 设

$$A=\begin{pmatrix}3 & -10 & -6\\ 1 & -4 & -3\\ -1 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

利用凯莱定理求 A^{100}.

10. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是三阶方阵 A 的特征根,$(1,1,1)',(0,1,1)',(0,0,1)'$ 为分别对应它们的特征向量,求证:

$$(A^n)'=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & \lambda_1^n-\lambda_2^n & \lambda_1^n-\lambda_3^n\\ 0 & \lambda_2^n & \lambda_2^n-\lambda_3^n\\ 0 & 0 & \lambda_3^n\end{pmatrix}$$

11. 设

$$A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(1)求 $\mathrm{Tr}A^k(k=1,2,3,\cdots)$;

(2)证明 A 不与对角阵相似.

12. 设 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征根,证明:与 A 可换的 n 阶方阵 B 必与对角阵相似.

13. n 阶实矩阵 A,B,若存在可逆实矩阵 P 使 $A=P^{-1}BP$. 则称 A,B **实相似**,若存在可逆复矩阵 Q 使 $A=Q^{-1}BQ$,则称 A 与 B **复相似**. 证明:A 与 B 实相似的充要条件 A 与 B 复相似.

14. 设

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

是一个实矩阵且 $ad-bc=1$. 证明:

(1)如果 $|\mathrm{Tr}(A)|>2$,那么存在可逆实矩阵 T 使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{bmatrix}$$

这里 $\lambda\neq 0,1,-1$.

(2)如果 $|\mathrm{Tr}(A)|=2$,且 $A\neq\pm E$,那么存在可逆实矩阵 T 使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad 或\quad \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

第五章　方阵的相似标准形

§1　λ-矩阵及其标准形

基本概念与结论

一、λ-矩阵

1. 符号 $P[\lambda]$ 表示数域 P 上关于文字 λ 的多项式构成的多项式环. 取 $a_{ij}(\lambda)\in P[\lambda]$，称如下的矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

为 P 上 $m\times n$ 的 λ-矩阵；特别，当 $m=n$ 时，称 $A(\lambda)$ 为 **P 上的 n 阶 λ-矩阵**. 形如

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

的 P 上 n 阶 λ-矩阵称为**对角形 λ-矩阵**.

显然，λ-矩阵也包括以数为元素的矩阵(即数字矩阵). 为区别起见，以下用 $A(\lambda),B(\lambda),\cdots$表示 λ-矩阵，仍用 $A,B,\cdots$表示普通的数字矩阵，E 表示 n 阶单位矩阵. 为了简便，以下提到的 λ-矩阵，如未作特别声明，均指数域 P 上的 λ-矩阵.

2. λ-矩阵的相等、加法和乘法运算、n阶λ-矩阵的行列式定义等，都和数字矩阵的相应定义完全一致，因而λ-矩阵与数字

矩阵有相同的运算规律，有相同的行列式性质. $A(\lambda)$的秩仍定义为：非零矩阵的秩等于其中不为零子式的最高阶数；零矩阵的秩为零.

3. 设$A(\lambda)$是n阶λ-矩阵，若存在n阶λ-矩阵$B(\lambda)$，使

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E \tag{1}$$

其中E是n阶单位矩阵，则称$A(\lambda)$为**可逆矩阵**. 易知这样的$B(\lambda)$是唯一的. 称$B(\lambda)$是$A(\lambda)$的**逆矩阵**，记$B(\lambda)=A^{-1}(\lambda)$.

λ-矩阵$A(\lambda)$可逆的充分必要条件是它的行列式$|A(\lambda)|$为数域P中不为零的数.

4. λ-矩阵的初等变换指的是：

(1)换法变换　两行(列)互换位置；

(2)倍法变换　某一行(列)乘以非零常数；

(3)消法变换　某一行(列)的$\varphi(\lambda)(\in P[\lambda])$倍加到另一行(列)上去.

5. 单位矩阵经过一次λ-矩阵的初等变换得到的矩阵称为**初等λ-矩阵**. 简称**初等矩阵**. 它具有以下性质：

(1)初等矩阵是可逆阵；

(2)对m×n的λ-矩阵$A(\lambda)$，左(右)乘一个m阶(n阶)初等矩阵，相当于对$A(\lambda)$的行(列)作相应的初等变换；

(3)n阶λ-矩阵$A(\lambda)$可逆的充分必要条件是$A(\lambda)$可表成有限个初等矩阵之积.

二、λ-矩阵在初等变换下的标准形

1. λ-矩阵$A(\lambda)$经过有限次初等变换后化成$B(\lambda)$，称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$**等价**(也叫**相抵**)，记为$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$.

2. 若λ-矩阵$A(\lambda)$等价于如下形式的矩阵

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

且满足条件：(1)$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)\quad(i=1,2,\cdots,r-1)$.

(2)$d_i(\lambda)$是首项系数为 1 的多项式($i=1,2,\cdots,r$)，则称 $B(\lambda)$ 是$A(\lambda)$的**标准形(也叫法式)**，称$B(\lambda)$的对角形上各非零元素 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$为$A(\lambda)$的**不变因子**. $A(\lambda)$的标准形是唯一的.

3. n 阶方阵 A 的特征矩阵 λE-A 的标准形为：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & d_{s+1}(\lambda) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3}$$

这里 $d_{s+1}(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$是 $\lambda E-A$ 的非常数不变因子，A 的特征矩阵的标准形(3). 简称为**矩阵 A 的标准形**.

4. 等价的 λ-矩阵有相同的秩(注意：逆不真).

5. 设 λ-矩阵 $A(\lambda)$的秩 $r>0$，k 是正整数且 $1\leqslant k\leqslant r$，称 $A(\lambda)$的一切 k 级子式的首项系数为 1 的最大公因式为它的 **k 级行列式因子**. 记为 $D_k(\lambda)$.

6. 数域 P 上 λ-矩阵 $A(\lambda)$的一切不变因子 $d_i(\lambda)$ ($i=1,2,\cdots,r$) 在 P 上的标准分解式中不可约多项式的方幂的全体(相同的按出现的次数计算)，称为 $A(\lambda)$在 P 上的**初等因子**. 简称 $A(\lambda)$的初等因

子. 特别当 P 是复数域时,$A(\lambda)$的每个初等因子都是一次因式的幂.

7. n 阶方阵 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的行列式因子、不变因子和初等因子,分别简称为 A **的行列式因子**、**不变因子**和**初等因子**.

8. n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$的各阶行列式因子和不变因子之间有如下的关系:

$$(1)D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)\quad(k=1,2,\cdots,r)\tag{4}$$

$$(2)d_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)},d_1(\lambda)=D_1(\lambda)(k=2,3,\cdots,r)\tag{5}$$

9. 设 $B(\lambda)$是数域 P 上对角形 λ-矩阵,将其对角线上次数大于0的元素分解为 P 上不可约因式的方幂之积,则所有这些方幂(相同的按出现的次数计算)的全体就是 $B(\lambda)$的初等因子.

10. 若 $A(\lambda)$、$B(\lambda)$都是 $m\times n$ 的 λ-矩阵,则以下条件彼此等价:

(1)$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$;

(2)有相同的标准形;

(3)有相同的行列式因子;

(4)有相同的不变因子;

(5)有相同的秩和初等因子;

(6)有初等 λ-矩阵 $P_1(\lambda),\cdots,P_s(\lambda),Q_1(\lambda),\cdots,Q_t(\lambda)$,使

$$P_1(\lambda)\cdots P_s(\lambda)A(\lambda)Q_1(\lambda)\cdots Q_t(\lambda)=B(\lambda)\tag{6}$$

(7)存在 m 阶可逆矩阵 $P(\lambda)$和 n 阶可逆矩阵 $Q(\lambda)$,使

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=B(\lambda)\tag{7}$$

应用举例

例1 下列 n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$是否为满秩矩阵(秩为 n 的矩阵)? 是否可逆的? 若可逆,求其逆矩阵:

$$(1)A(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\lambda-1&\lambda\\\lambda&1&\lambda^2\end{pmatrix},\quad(2)A(\lambda)=\begin{pmatrix}1&\lambda&0\\2&\lambda&1\\\lambda^2+1&2&\lambda+3\end{pmatrix}$$

解 (1)行列式$|A(\lambda)|=\lambda^3-2\lambda^2\overline{\in}P$. 但秩$A(\lambda)=3\neq 0$,故$A(\lambda)$是满秩阵而不可逆.

(2)行列式$|A(\lambda)|=-2\in P$,$A(\lambda)$是满秩矩阵且可逆,用数字矩阵求逆矩阵的同样方法可求得

$$A^{-1}(\lambda)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^3+\lambda-2 & -\lambda^3-\lambda & \lambda\\ -\lambda^2-1 & \lambda^2+1 & -1\\ 4-\lambda^3-\lambda & \lambda^3+\lambda-2 & -\lambda\end{pmatrix}$$

例 2 求λ-矩阵$A(\lambda)$的标准形,其中

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{pmatrix}$$

解 可用两种方法求$A(\lambda)$的标准形.

解法一 利用初等变换.

下面用符号$[j+i(\varphi(\lambda))]$表示消法变换:将第i行(列)的$\varphi(\lambda)$倍加到第j行(列)上.并约定置于箭头上(下)表示是对行(列)进行初等变换.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow[{[2+3(1)]}]{{[1+3(1)]}}\begin{pmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & \lambda\\ 0 & 0 & -\lambda\\ 1 & 0 & -\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1+3(-1)]}\begin{pmatrix}0 & \lambda^2+\lambda & \lambda+\lambda^2\\ 0 & 0 & -\lambda\\ 1 & 0 & -\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{[3+2(-\lambda)]\\ [1+2(\lambda+1)]}}\begin{pmatrix}0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此即知,$A(\lambda)$的标准形应为

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}\tag{8}$$

解法二 利用行列式因子和不变因子的关系式(5),先求出$A(\lambda)$的行列式因子.

因$(1-\lambda,\lambda)=1$，故 $D_1(\lambda)=1$.

$A(\lambda)$的第二、三列均含有因子λ，故二级行列式因子必含有因子λ，又第一，二行上有两个二阶子式$M_1=\begin{vmatrix}1-\lambda & \lambda^2\\ \lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda-\lambda^2)$和 $M_2=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda\\ \lambda & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+1)$的最大公因式是 λ，故 $D_2(\lambda)=\lambda$.

又
$$D_3(\lambda)=|A(\lambda)|=\lambda^2(\lambda+1)$$
于是，$A(\lambda)$的不变因子是：

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda$$

$$d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=\lambda(\lambda+1)$$

故 $A(\lambda)$的标准形仍是(8)中的矩阵 $B(\lambda)$.

λ-矩阵的标准形、不变因子、行列式因子及初等因子四者之间，有着密切的联系. 已知其中之一，便可逐一求出其他. 上例已阐明求 λ-矩阵的标准形的多种途径. 通过下面例子可以看到，在某种情况下，还可利用已知的初等因子求得 λ-矩阵的标准形.

例 3 试求实数域 R 上 λ-矩阵 $A(\lambda)$的标准形，其中

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2+2\lambda+2 & & & \\ & \lambda^3+\lambda^2-2 & & \\ & & \lambda+1 & \\ & & & (\lambda+1)^2\end{pmatrix}$$

解 对角形矩阵的初等因子，由其对角线上所有元素所含一切不可约因式的方幂组成，注意到元素 $\lambda^3+\lambda^2-2=(\lambda^2+2\lambda+2)(\lambda-1)$是它在 R 上的不可约因式分解式，于是 $A(\lambda)$的初等因子为：

$$\lambda^2+2\lambda+2,\lambda^2+2\lambda+2,\lambda+1,(\lambda+1)^2,\lambda-1 \qquad (9)$$

在(9)的基础上，找出 $A(\lambda)$的不变因子 $d_i(\lambda)(i=1,2,3,4)$. 考虑到条件 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$，可断言 $A(\lambda)$的最后一个不变因子恰含(9)

中一切相异不可约因式的最高次幂，又 $A(\lambda)$ 的秩为 4，故最后一个不变因子为 $d_4(\lambda)$. 再 $d_3(\lambda)$ 应含(9)中把 $d_4(\lambda)$ 取后余下的一切不同的不可约因式的最高次幂. 以此类推，可求出 $d_2(\lambda)$，$d_1(\lambda)$. 这个过程可用下表显示出来.

$d_4(\lambda)$	$\lambda^2+2\lambda+2$	$(\lambda+1)^2$	$\lambda-1$
$d_3(\lambda)$	$\lambda^2+2\lambda+2$	$(\lambda+1)$	1
$d_2(\lambda)$	1	1	1
$d_1(\lambda)$	1	1	1

(10)

即 $\quad d_4(\lambda)=(\lambda^2+2\lambda+2)(\lambda+1)^2(\lambda-1)$

$d_3(\lambda)=(\lambda^2+2\lambda+2)(\lambda+1)$， $\quad d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$. 故 $A(\lambda)$ 的标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (\lambda^2+2\lambda+2)(\lambda+1) & \\ & & & (\lambda^2+2\lambda+2)(\lambda+1)^2(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

此例求解过程中，通过初等因子求不变因子的方法是可取的. 表(10)的行数等于 $A(\lambda)$ 的秩，列数为初等因子中互异的不可约因式的个数，每个不可约因式取完后，则用 1 代替，直到把表填满. 于是表的每行确定一个 $A(\lambda)$ 的不变因子. 第一行确定最后一个不变因子，以后各行依次确定出其他的不变因子.

例 4 六阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & -b & & & & \\ b & a & 1 & & & \\ & & a & -b & & \\ & & b & a & 1 & \\ & & & & a & -b \\ & & & & b & a \end{pmatrix}$$

其中 a、b 是实数且 $b\neq0$. 试求 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的行列式因子、

不变因子及其在复数域上的初等因子.

解

$$A(\lambda)=\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-a & b & & & & \\ -b & \lambda-a & -1 & & & \\ & & \lambda-a & b & & \\ & & -b & \lambda-a & -1 & \\ & & & & \lambda-a & b \\ & & & & -b & \lambda-a\end{pmatrix}$$

先求行列式因子 $D_k(\lambda)$. 注意到 $A(\lambda)$右上方有个 5 阶子式等于 $+b^3\neq0$,可知$D_5(\lambda)=1$,考虑到整除条件$D_i(\lambda)\mid D_{i+1}(\lambda)$,便得 $A(\lambda)$的行列式因子:

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=D_4(\lambda)=D_5(\lambda)=1$$

$$D_6(\lambda)=|\lambda E-A|=[(\lambda-a)^2+b^2]^3$$

$A(\lambda)$的不变因子:

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=d_4(\lambda)=d_5(\lambda)=1$$

$$d_6(\lambda)=\frac{D_6(\lambda)}{D_5(\lambda)}=[(\lambda-a)^2+b^2]$$

$A(\lambda)$的初等因子:$(\lambda-a-bi)^3$,$(\lambda-a+bi)^3$

一般来说,先计算某个高级行列式因子,利用整除条件 $D_k(\lambda)\mid D_{k+1}(\lambda)$,就可大致估计低级行列式因子的取值范围,这是计算行列式因子常用的方法之一. 特别是如例 4,当某个 $D_k(\lambda)$为非零常数的情形,这个方法更显得简捷、有力.

例 5 试求 λ-矩阵 $A(\lambda)=\lambda E-A$ 在有理数域、实数域和复数域上的初等因子,其中矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ -4 & -2 & 6\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

解 先用初等变换将 $A(\lambda)$化成与之等价的对角形矩阵.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 3\\ 4 & \lambda+2 & -6\\ 1 & 1 & \lambda-5\end{pmatrix}\xrightarrow[{[1+3(1)]}]{}\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 3\\ -2 & \lambda+2 & -6\\ \lambda-4 & 1 & \lambda-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[3+2(3)]}\atop{[1+2(\lambda)]}]{}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ \lambda^2+2\lambda-2 & \lambda+2 & 3\lambda\\ 2\lambda-4 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow{{[3+1(1)]}\atop{[2+1(\lambda+2)]}}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ \lambda^2+2\lambda-2 & 0 & 3\lambda\\ 2\lambda-4 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[1+3(-2)]}]{}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ \lambda^2-4\lambda-2 & 0 & 3\lambda\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow[{[3+1(1)]}]{}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ \lambda^2-4\lambda-2 & 0 & \lambda^2-\lambda-2\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2+3(1)]}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ \lambda^2-4\lambda-2 & 0 & \lambda^2-4\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow{[2+3(-\lambda-2)]}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ \lambda^2-4\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[1,2]}]{}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2-4\lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

故
$$A(\lambda)\simeq B(\lambda)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2-4\lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

于是 $A(\lambda)=\lambda E-A$ 的初等因子是：

在有理数域上： $\lambda-2,\lambda^2-4\lambda-2$.

在实数域上：$\lambda-2,\lambda-2+\sqrt{6},\lambda-2-\sqrt{6}$.

在复数域上：$\lambda-2,\lambda-2\sqrt{6},\lambda-2-\sqrt{6}$.

由此可见，一般而言初等因子与所考虑的数域 P 有关. 值得指出的是，上例中与 $A(\lambda)$ 等价的 λ-矩阵 $B(\lambda)$，并非 $A(\lambda)$ 的标准形. 为求初等因子，得到对角形阵 $B(\lambda)$ 就行了. 这比按定义先求 $A(\lambda)$ 的标准形及它的不变因子再求初等因子简便.

例 6 设 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n\in P[\lambda]$，用 $f(\lambda)$ 的系数作 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{n-2}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}$$

证明 A 的特征矩阵 $A(\lambda)=\lambda E-A$ 只有唯一的非常数不变因子.

证明 先用初等变换化简 $\lambda E-A$

$$A(\lambda)=\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0&\cdots&0&a_n\\-1&\lambda&0&\cdots&0&a_{n-1}\\0&-1&\lambda&\cdots&0&a_{n-2}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&-1&\lambda+a_1\end{pmatrix}$$

将 $A(\lambda)$的第 2,3,…,n 行分别乘以 $\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1}$后都加到第一行上去. 则

$$A(\lambda)\simeq B(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&f(\lambda)\\-1&\lambda&0&\cdots&0&a_{n-1}\\0&-1&\lambda&\cdots&0&a_{n-2}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&-1&\lambda+a_1\end{pmatrix}$$

故只须求 λ-矩阵 $B(\lambda)$的不变因子. 注意 λ-矩阵 $B(\lambda)$左下角的 $n-1$ 阶子式等于常数$(-1)^{n-1}$,它的 $n-1$ 级行列式因子应为 1,仿例 3 的解法,便得 $A(\lambda)$的行列式因子为

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1,D_n(\lambda)=|B(\lambda)|=f(\lambda)$$

于是 $A(\lambda)$的不变因子是:

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1,d_n(\lambda)=D_n(\lambda)=f(\lambda)$$

故 $A(\lambda)$只有唯一的非常数不变因子 $f(\lambda)$.

此例的解法告诉我们,为求 λ-矩阵 $A(\lambda)$的诸因子(行列式因子,不变因子和初等因子),可先寻求形式较为简单且与 $A(\lambda)$等价

的 λ-矩阵 $B(\lambda)$的诸因子.

例 7 设 A、B 是两个 n 阶方阵,证明如果 A 与 B 合同,则 λ-矩阵 $\lambda A-A'$ 与 $\lambda B-B'$ 等价.

证明 A 与 B 合同表示有 n 阶可逆方阵 P,使 $B=P'AP$. 于是 $B'=P'A'P$ 且

$$\lambda B-B'=\lambda P'AP-P'A'P=P'(\lambda A-A')P$$

因 P 是可逆阵,从而 P' 也可逆,故 $\lambda A-A'$ 与 $\lambda B-B'$ 是等价的 λ-矩阵.

§2 数字矩阵的相似

基本概念与结论

一、λ-矩阵多项式

1. 任意 n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 总可表成以下形状:

$$A(\lambda)=\lambda^m A_0+\lambda^{m-1}A_1+\cdots+\lambda A_{m-1}+A_m$$

或
$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_{m-1}\lambda+A_m \tag{11}$$

其中系数 $A_i=(i=0,1,\cdots,m)$ 是 n 阶数字矩阵. 当 $A_0\neq 0$ 时,称 $A(\lambda)$ 的次数是 m,称(11)式为 $A(\lambda)$ 的**关于 λ 的多项式表达式**. 令 H 为 n 阶数字方阵,

则记 $A^{(l)}(H)=H^m A_0+H^{m-1}A_1+\cdots+HA_{m-1}+A_m$

$A^{(r)}(H)=A_0H^m+A_1H^{m-1}+\cdots+A_{m-1}H+A_m$

因为矩阵乘法不满足交换律,所以一般说来 $A^{(l)}(H)\neq A^{(r)}(H)$.

2. A 为 n 阶数字方阵,$U(\lambda)$ 和 $V(\lambda)$ 都是 n 阶 λ-矩阵,则存在唯一的两对 λ-矩阵 $Q(\lambda)$,$R(\lambda)$ 以及数字矩阵 U_0,V_0,使

$$U(\lambda)=(\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0, \text{且} \quad U_0=U^{(l)}(A);$$

$$V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0, \qquad V_0=V^{(r)}(A).$$

$Q(\lambda)$ 叫以 $(\lambda E-A)$ 左除 $U(\lambda)$ 的**左商**,$R(\lambda)$ 叫以 $(\lambda E-A)$ 右除 $V(\lambda)$

的**右商**

3. 设 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m\in P[\lambda]$，$a_0\neq0$，则有唯一的 $m-1$ 次 λ-矩阵 $Q(\lambda)$，使

(1)$f(\lambda)E=(\lambda E-A)Q(\lambda)+f(A)=Q(\lambda)(\lambda E-A)+f(A)$成立，

(2)$f(\lambda)E=(\lambda E-A)Q(\lambda)$，或 $f(\lambda)E=Q(\lambda)(\lambda E-A)$成立

的充分必要条件是 $f(A)=0$.

4. n 阶数字矩阵 A 的最后一个不变因子等于 A 的最小多项式(见例 2).

二、矩阵相似的条件

1. 设 A 与 B 是 P 上两个 n 阶数字矩阵，则以下诸条件彼此等价：

(1)A 与 B 相似；

(2)$(\lambda E-A)\simeq(\lambda E-B)$；

(3)有相同的行列式因子；

(4)有相同的不变因子；

(5)在 P 上有相同的初等因子；

2. 矩阵 A 相似于对角形矩阵的充分必要条件是 $\lambda E-A$ 的初等因子都是一次的.

应用举例

一、不变因子与最小多项式

例 1 写出 λ-矩阵 $A(\lambda)$关于 λ 的多项式表达式，其中

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2-\lambda & 2(\lambda+1)^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{bmatrix}$$

解

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 5 & 3\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

例 2 设 A 是 n 阶方阵，证明 A 的最小多项式 $m(\lambda)$等于最后

一个不变因子 $d_n(\lambda)$.

分析 据最小多项式的定义，它应是 A 的零化多项式中首 1 且次数最低者. 我们的证明分两步进行. 先证 $d_n(\lambda)$ 是 A 的零化多项式. 再证 $d_n(\lambda)=m(\lambda)$.

证明 (1)因方阵 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的 $n-1$ 级行列式因子 $D_{n-1}(\lambda)$ 应是它 伴随矩阵 $(\lambda E-A)^*$ 中一切元素的最大公因式，若设

$$(\lambda E - A)^* = D_{n-1}(\lambda)B(\lambda) \tag{12}$$

那么，$B(\lambda)$ 的一切元素作为多项式应是互质的.

又 $$(\lambda E-A)^*(\lambda E-A)=|\lambda E-A|E=D_n(\lambda)E$$

将(12)式代入，得

$$D_{n-1}(\lambda)[B(\lambda)(\lambda E - A)] = D_n(\lambda)E = D_{n-1}(\lambda)[d_n(\lambda)E]$$

而 $D_{n-1}(\lambda)\neq 0$，于是

$$B(\lambda)(\lambda E - A) = d_n(\lambda)E \tag{13}$$

从而 $d_n(A)=0$

(2)因 $d_n(\lambda)$ 是 A 的零化多项式，应有 $m(\lambda)\mid d_n(\lambda)$. 设 $d_n(\lambda)=m(\lambda)h(\lambda)$，若证得 $h(\lambda)=1$ 则结论自明. 考虑 λ-矩阵 $A(\lambda)=m(\lambda)E$，因 $m(A)=0$，必有 λ-矩阵 $Q(\lambda)$ 存在，使

$$m(\lambda)E = Q(\lambda)(\lambda E - A)$$

代入(13)式得

$$B(\lambda)(\lambda E - A) = d_n(\lambda)E = m(\lambda)h(\lambda)E = [Q(\lambda)h(\lambda)](\lambda E - A)$$

由商的唯一性得 $B(\lambda)=Q(\lambda)h(\lambda)$.

据此，$h(\lambda)$ 应是 $B(\lambda)$ 中 n^2 个元素的公因式，已知 $B(\lambda)$ 所含一切元素是互质的. 故 $h(\lambda)=1$，$m(\lambda)=d_n(\lambda)$.

最小多项式与最后一个不变因子间存在着的这种联系，不但可推出最小多项式的一些有用的性质(见例 3)，还可得到在复数域上判别矩阵与对角形矩阵相似的一个重要判别条件.

例 3 设 $f(\lambda)$ 是 n 阶方阵 A 的特征多项式，$m(\lambda)$ 是 A 的最小

多项式，证明：

(1)λ 是 A 的特征根的充要条件是 λ 为 $m(\lambda)$的根；

(2)若 A 的特征根两两互异，则 $f(\lambda)=m(\lambda)$；

(3)$f(\lambda)\mid(m(\lambda))^n$.

证明 (1)充分性显然真，只须证必要性. 因 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的秩是 n，易知 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$

任取 A 的一个特征根 λ_0，由 $f(\lambda_0)=0$ 知必存在 $d_i(\lambda)$，使 $d_i(\lambda_0)=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，但$d_i(\lambda)\mid d_n(\lambda)$，于是$d_n(\lambda_0)=0$，但$m(\lambda)=d_n(\lambda)$，故 $m(\lambda_0)=d(\lambda_0)=0$，$\lambda_0$ 是 $m(\lambda)$的根.

(2)由题设知 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两互异，由(1)有 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=f(\lambda)$

(3)因 $d_n(\lambda)=m(\lambda)$，但每个不变因子 $d_i(\lambda)$都是 $d_n(\lambda)$的因式，故

$$d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)\mid d_n^n(\lambda)\text{，即 } f(\lambda)\mid m^n(\lambda)$$

二、矩阵相似的判定

在第四章，我们曾根据矩阵相似的定义，讨论过两个矩阵相似的问题，下面的例子说明，用 λ-矩阵的有关知识去判断矩阵的相似是一个重要的方法.

例 4 证明下面两个 n 阶方阵 A 与 B 相似，这里

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

证明 计算它们的行列式因子.

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

其右上角有 $n-1$ 阶子式等于 $(-1)^{n-1}$，故 $D_{n-1}(\lambda)=1$，于是 A 的行列式因子为

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1, D_n(\lambda)=\lambda^n \tag{14}$$

同理计算 $\lambda E-B$ 的行列式因子，仍有(14)式中的结果. 于是由 § 2 基本结论知 A 与 B 相似.

例 5 以下形状的矩阵称为**下海森伯格阵**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & & & \\ & & a_{33} & a_{34} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & * & & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{i,i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 称为它的**上对角线元素**，证明上对角线元素全不为零的两个下海森伯格阵 A 与 B 相似的充要条件是它们的特征多项式相等.

证明 任一下海森伯格阵的特征矩阵右上角的 $n-1$ 阶子块中，任意 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 阶顺序主子式均等于上对角线上前 k 个元素之积，故它的 k 级行列式因子均为 1. 换言之，任取两个下海森伯格阵 A 与 B，它们有 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1$，故 A 与 B 相似充要条件应为 n 级行列式因子相等，即 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.

例 6 判别下列复方阵，哪些是相似的？

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-2&-1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

解 先分别计算矩阵的特征多项式，得 $f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3$，$f_B(\lambda)=|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-1)^2$，$f_C(\lambda)=|\lambda E-C|=(\lambda-1)^3$，只有矩阵 A 与 C 才可能相似.

再求 A 与 C 的标准形，得

$$(\lambda E-A)\simeq\begin{pmatrix}1&&\\&(\lambda-1)&\\&&(\lambda-1)^2\end{pmatrix}\simeq(\lambda E-C)$$

三个矩阵中仅 A 与 C 相似，B 与 A，B 与 C 均不相似.

例 7 证明下列三个方阵，任何两个都不相似.

$$A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}$$

证明 若 $a=0$，显见 A、B、C 的秩互不相等. 故任何两个矩阵均不相似.

若 $a\neq0$；易知 A,B,C 的初等因子分别为 $\lambda-a,\lambda-a,\lambda-a$；$\lambda-a,(\lambda-a)^2$；$(\lambda-a)^3$，其中任二组初等因子均不相同，换言之，任二矩阵都不相似.

例 8 A 是 n 阶方阵，如果使 $A^k=0$ 的最小正整数就是 k，称 A 为 k 次幂零阵，证明一切 n 阶 $n-1$ 次幂零矩阵彼此相似.

证明 设 A 是任意 $n-1$ 次幂零矩阵，则

$$A^{n-1}=0,\text{而 } A^s\neq0\ (0<s<n-1)$$

于是 $f(\lambda)=\lambda^{n-1}$ 是 A 的零化多项式，且 A 的最小多项 $m(\lambda)=\lambda^{n-1}$，A 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)=\lambda^{n-1}$. 又 $|\lambda E-A|=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$ 为 n 次式. 且有 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$，故 A 的不变因子为：

$$d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-2}(\lambda)=1,d_{n-1}(\lambda)=\lambda,d_n(\lambda)=\lambda^{n-1}$$

由 A 的任意性知任两个 n 阶 $n-1$ 次幂零阵有相同的不变因子，故相似.

例 9 设 n 阶方阵 A,A_1,B,B_1 中，A_1 和 A 是满秩的，证明有可逆方阵 P,Q，使 $A_1=PAQ,B_1=PBQ$ 的充分必要条件是 $\lambda A-B$ 与 λA_1-B_1 等价.

分析 $\lambda A-B$ 与 λA_1-B_1 等价的充要条件之一是有可逆阵 P,Q 使 $\lambda A_1-B_1=P(\lambda A-B)Q$，我们沿着这样的思路去证明.

证明 必要性 由题设 $A_1=PAQ,B_1=PBQ$，于是

$$\lambda A_1-B_1=\lambda PAQ-PBQ=P(\lambda A-B)Q$$

即

$$(\lambda A_1-B_1)\simeq(\lambda A-B)$$

充分性 由题设 $(\lambda A_1-B_1)\simeq(\lambda A-B)$

故有可逆矩阵 S、T 使

$$S(\lambda A-B)T=\lambda A_1-B_1$$

已知 A 及 A_1 是满秩阵，它们的逆矩阵存在，于是由上式有

$$SA(\lambda E-A^{-1}B)T=A_1(\lambda E-A_1^{-1}B_1)$$

$$A_1^{-1}SA(\lambda E-A^{-1}B)T=\lambda E-A_1^{-1}B_1$$

注意矩阵 $A_1^{-1}SA$ 是可逆矩阵，T 是可逆阵. 这就推出 $(\lambda E-A^{-1}B)\simeq(\lambda E-A_1^{-1}B_1)$，于是 $A^{-1}B$ 与 $A_1^{-1}B_1$ 相似，必有可逆方阵设为 Q，使

$$A_1^{-1}B_1=Q^{-1}(A^{-1}B)Q,\quad B_1=A_1Q^{-1}A^{-1}BQ$$

于是

$$\begin{aligned}\lambda A_1-B_1&=\lambda A_1E-A_1Q^{-1}A^{-1}BQ\\&=\lambda A_1(Q^{-1}A^{-1}AQ)-A_1Q^{-1}A^{-1}BQ\\&=A_1Q^{-1}A^{-1}(\lambda A-B)Q\end{aligned}\qquad(15)$$

令 $P=A_1Q^{-1}A^{-1}$，显然 P 是可逆方阵，比较上式的两端，可得

$$A_1=PAQ,B_1=PBQ$$

三、矩阵与对角阵相似的条件

例 10 设 A 是 n 阶复矩阵，则 A 与对角形矩阵相似的充要条件是 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 无重根.

证明 我们用例 2 中 $m(\lambda)=d_n(\lambda)$ 及不变因子有关的性质来

证明.

充分性 因 $m(\lambda)=d_n(\lambda)$ 无重根，由 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$ 知，A 的每个不变因子 $d_i(\lambda)$ 都不能有重根. 从而特征矩阵 $\lambda E-A$ 作为复数域上的 λ-矩阵，其初等因子全为一次式. 故 A 必与对角阵相似.

必要性 因 A 与对角阵相似，特征矩阵 $\lambda E-A$ 的初等因子必均为一次式，故最后一个不变因子 $d_n(\lambda)$ 也只能是不同的一次因式之积. 这就证明了最小多项式 $m(\lambda)=d_n(\lambda)$ 无重根.

此例所给出的判别矩阵与对角形矩阵相似的条件，形式上还可削弱，见下例.

例 11 A 为 n 阶复方阵，证明 A 与对角形矩阵相似的充分必要条件是存在次数大于 1 的无重根的多项式 $f(\lambda)$，使 $f(A)=0$

证明 取 $f(\lambda)=m(\lambda)$ 为 A 的最小多项式，即知必要性成立. 现证充分性由 $f(A)=0$ 知 $f(\lambda)$ 为 A 的零化多项式，故有 $m(\lambda)|f(\lambda)$. 已知 $f(\lambda)$ 无重根，故 $m(\lambda)$ 没有重根. 所以 A 与对角形矩阵相似.

利用例 11 来判定复数域上的矩阵与对角形阵相似常常是较为简便的. 因为要找一个矩阵 A 的无重根的零化多项式，在一些情况下是比较容易的. 例如幂等矩阵($A^2=A$)，幺幂矩阵($A^k=E$)显然分别有无重根的零化多项式 $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda$，$f(\lambda)=\lambda^k-1$. 故幂等矩阵，幺幂矩阵和它的特殊情况对合矩阵($A^2=E$)都是在复数域上能与对角形矩阵相似的.

下面，再提供一种判别矩阵可与对角形矩阵相似的充要条件.

例 12 A 是 n 阶复方阵，证明 A 与对角形矩阵相似的充分必要条件是对 A 的每个特征根 λ_i，均有

$$\text{秩}(\lambda_i E-A)=\text{秩}(\lambda_i E-A)^2 \tag{16}$$

证明 必要性 因 A 与对角阵相似，故 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 无重根，A 的任一特征根 λ_i 只能是 $m(\lambda)$ 的单根. 于是 $m(\lambda)$ 与 $(\lambda-\lambda_i)^2$ 的最大公因式等于 $\lambda-\lambda_i$，由最大公因式的性质知，有多项式

$u(\lambda), v(\lambda) \in C[\lambda]$,使

$$u(\lambda)m(\lambda)+v(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^2=(\lambda-\lambda_i)$$

$$u(A)m(A)+v(A)(A-\lambda_i E)^2=A-\lambda_i E$$

因 $m(A)=0$,故 $$v(A)(A-\lambda_i E)^2=A-\lambda_i E$$

$$\text{秩}(A-\lambda_i E)\leqslant\text{秩}(A-\lambda_i E)^2$$

但 秩$(A-\lambda_i E)^2\leqslant$秩$(A-\lambda_i E)$,故条件(16)成立.

充分性 由例 10,只须证明 A 的最小多项式无重根.用反证法.设 A 的某个特征根 λ_i 是最小多项式 $m(\lambda)$ 的重根,可设

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^2 g(\lambda)$$

因多项式 $(\lambda-\lambda_i)g(\lambda)$ 次数低于 $m(\lambda)$ 的次数,故

$$(A-\lambda_i E)g(A)\neq 0$$

但 $$(A-\lambda_i E)^2 g(A)=m(A)=0$$

又 $g(A)\neq 0$,$g(A)$ 必存在非零的列向量 X_0,使

$$(A-\lambda_i E)X_0\neq 0,\text{而}(A-\lambda_i E)^2 X_0=0$$

这就是说,齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i E)X=0 \quad \text{与} \quad (A-\lambda_i E)^2 X=0$$

不同解.故秩$(A-\lambda_i E)\neq$秩$(A-\lambda_i E)^2$,与(16)矛盾.故 $m(\lambda)$ 无重根.从而 A 与对角形矩阵相似.

以上三例从不同的角度提出了矩阵与对角形矩阵相似的充分必要条件,在第四章也给出了这样的一些条件,我们在解题时,要结合题设条件作出最佳的选择.

例 13 A 是 n 阶复方阵,$A^m=A(1<m\leqslant n)$,证明 A 必与一个对角阵相似.若限制为实数域,即 A 为实矩阵.结论如何?

证明 (1)在复数域上,A 有零化多项式 $f(\lambda)=\lambda^m-\lambda$,它无重根,故 A 与对角阵相似.

(2)在实数域上,这个结论不一定成立.例如

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=(e_2,\ -e_1,0,0,0)$$

则 $\quad Ae_1=e_2, Ae_2=-e_1, A0=0$. 于是

$$A^2=A(e_2,-e_1,0,0,0)=(-e_1,-e_2,0,0,0)$$

$$A^3=A(-e_1,-e_2,0,0,0)=(-e_2,e_1,0,0,0)$$

$$A^4=A(-e_2,e_1,0,0,0)=(e_1,e_2,0,0,0)$$

$$A^5=A(e_1,e_2,0,0,0)=(e_2,-e_1,0,0,0)=A$$

但 $\quad |\lambda E-A|=(\lambda^2+1)\lambda^3$. A 的特征根不全为实数，故 A 不能与实对角阵相似.

此例提出的问题值得注意. 在讨论与对角阵相似时，矩阵所在的数域不应忽视.

§3 若当(Jordan)标准形

基本概念与结论

对于若当标准形的讨论我们限制在复数域上来进行.

一、若当块

我们称如下形状的 t 阶矩阵

$$J(\lambda_0,t)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & & \\ 1 & \lambda_0 & & & \\ & 1 & \lambda_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_0\end{pmatrix} \tag{17}$$

为属于特征根 λ_0(或属于初等因子 $(\lambda-\lambda_0)^t$)的**若当块**. 显见，若当

块 $J(\lambda_0,t)$ 有唯一的非常数不变因子 $(\lambda-\lambda_0)^t$，也有唯一的初等因子 $(\lambda-\lambda_0)^t$.

二、若当形矩阵

1. 对角线上为若当块的 n 阶对角分块矩阵

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix} \tag{18}$$

称为**若当形矩阵**. 其中 $J_i=J(\lambda_i,n_i)$，$(i=1,2,\cdots,s)$ 且 $\sum_{i=1}^{s} n_i=n$.

2. 复数域上 n 阶方阵 A 都相似于若当形矩阵 J，且如不计对角线上诸子块的次序，J 由 A 唯一确定. 称 J 为 A 的**若当标准形**.

应用举例

一、若当标准形的求法

为了求一个矩阵的若当标准形，可按下列步骤进行：

1. 求矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 在复数域 C 上的一切初等因子，设为 $\{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}\,|\,i=1,2,\cdots,s\}$.

2. 对每个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$，作 k_i 阶若当块：

$$J_i=J(\lambda_i,k_i)=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

3. 将得到的全部若当块构成若当形矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

它就是 A 的若当标准形.

例 1 设方阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \\ 14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

试求 A 的若当标准形.

解 用初等变换求得 A 的标准形(即 $\lambda E-A$ 的标准形)为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

故 A 的初等因子是:$\lambda,\lambda-2,(\lambda-1)^2$. 它的若当标准形是

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 2 试求方阵 A 的若当标准形

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ & & & 2 & -1 & 1 \\ & & & 2 & 2 & -1 \\ & & & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

解 A 是准对角形矩阵. 可分别先求出子块的初等因子,它们的并就是 A 的初等因子(见例 4). 分别记

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

因

$$\lambda E_3-A_1\simeq\begin{pmatrix}1&&\\&\lambda+1&\\&&(\lambda+1)(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

$$\lambda E_3-A_2\simeq\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(\lambda-1)^3\end{pmatrix}$$

所以 A 的初等因子是:$\lambda+1,\lambda+1,\lambda-2,(\lambda-1)^3$,从而 A 的若当标准形是

$$J=\begin{pmatrix}-1&&&&&\\&-1&&&&\\&&2&&&\\&&&1&&\\&&&1&1&\\&&&0&1&1\end{pmatrix}$$

例 3 已知三阶复方阵 A、B、C、D 有共同的特征多项式,证明其中必有两个方阵相似.

分析 因相似矩阵应有共同的若当标准形. 故结合特征根的情况,讨论它们的若当标准形的一切可能情况,就可证明此题.

证明 设它们的共同特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

下面可分三种情况来讨论.

(1)λ_1、λ_2、λ_3 两两互异. 此时矩阵应与对角形相似,即每个矩阵都相似于对角形矩阵

$$J_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},$$

(2)有一个二重根，不妨设 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$. 此时若当标准形有两种可能，它们是：

$$J_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},\quad J_3=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ 1 & \lambda_1 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

(3)$f(\lambda)$有一个三重根 λ_1. 这时若当标准形有三种可能. 它们是：

$$J_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_1\end{pmatrix},\quad J_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & 1 & \lambda_1\end{pmatrix},\quad J_3=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ 1 & \lambda_1 & \\ & 1 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

四个矩阵无论在那种情况下，显然都会有两个矩阵是彼此相似的.

例 3 说明了若当标准形的应用，下面再举例说明它的应用.

二、若当标准形的应用

因在复数域上任意n阶方阵A都与若当标准形矩阵J相似，J是准对角形矩阵，其中每个子块J_i的阶一般均低于矩阵A的阶，且形式较A简单，这就为在相似意义下降阶处理A的有关问题提供了可能性. 因此，在复数域上，采用若当标准形"过渡"，达到解决方阵 A 本身问题的目的，是若当标准形应用的一个重要方面.

例 4 已知复准对角形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t\end{pmatrix}$$

其中 A_i 为 n_i 阶方阵$(i=1,2,\cdots,t)$，证明 A 在复数域上的初等因子

是所有 $A_i(i=1,2,\cdots,t)$ 在复数域上的初等因子的并集.

证明 将每个子块 A_i 化为若当标准形 J_i，即有 n_i 阶可逆方阵 P_i，使 $P_i^{-1}A_iP_i=J_i \quad (i=1,2,\cdots,t)$.

令

$$P=\begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_t \end{pmatrix}$$

则 P 是 n 阶可逆方阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{pmatrix}=J$$

由若当标准形的唯一性知，J 应是 A 的若当标准形，且每个 J_i 中的若当块就是 J 的若当块，一个若当块对应一个初等因子. 故 A 的特征矩阵的初等因子是所有 A_i 的特征矩阵的初等因子的并集.

例 5 设 A 是 n 阶方阵，它有零特征根且是 k 重根，证明秩 $A^{k+l}=n-k$（其中 l 为任意正整数）.

分析 由于数域 P 上矩阵的秩不随 P 的扩大而改变. 故此题可在复数范围内利用若当标准形加以证明.

证明 先证 s 阶若当块

$$J_0=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有性质 $J_0^s=0$. 即 J_0 是幂零的.

用 e_j 表示第 j 个分量是 1，其余分量全是零的 s 维单位列向量（$1\leqslant j\leqslant s$）. 则 $J_0=(e_2,e_3,\cdots,e_s,0)$，且有等式

$$J_0e_1=e_2,J_0e_2=e_3,\cdots,J_0e_{s-1}=e_s,J_0e_s=0$$

于是 $J_0^2=J_0(e_2,e_3,\cdots,e_s,0)=(e_3,e_4,\cdots,e_s,0,0)$ 依此类推有

$$J_0^{s-1}=(e_s,0,\cdots,0,0),J_0^s=J_0(e_s,0,\cdots,0,0)=0$$

其次，设与 A 相似的若当标准形为 J，即有可逆阵 P

使 $$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_t\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}B_0&\\&B\end{bmatrix}$$

其中 $J_i=J(\lambda_i,n_i)(i=1,2,\cdots,t)$，$\sum\limits_{i=1}^{t}n_i=n$，$B_0$ 为 J 中一切特征根为零的若当块构成的 k 阶子块，B 为 J 中其余若当块构成. 故 B 应是 $n-k$ 阶的满秩子阵. 不妨设

$$B_0=\begin{pmatrix}J_1&&\\&\ddots&\\&&J_m\end{pmatrix}\quad(1\leqslant m\leqslant k)$$

由前面讨论知 $J_i^{n_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,m)$，又 $\sum\limits_{i=1}^{m}n_i=k$，故有 $B_0^k=0$，且对任意自然数 l 有 $B_0^{k+l}=0$. 又

$$P^{-1}A^{k+l}P=J^{k+l}=\begin{pmatrix}B_0^{k+l}&\\&B^{k+l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\\&B^{k+l}\end{pmatrix}$$

由于 B 是满秩 $n-k$ 阶子块，这就证明了结论：

$$秩\ A^{k+l}=秩\ B^{k+l}=n-k$$

此例证明中提到的零特征根所在若当块 B_0 是幂零的性质是常用的. 应予注意.

例 6 试证任意 n 阶复方阵 A 可表为 $A=B+C$，其中 C 是幂零阵，而 B 相似于对角形矩阵.

分析 此例所求的矩阵 B 和 C 中，要求 C 是幂零阵，考虑到

上例提到的幂零子块 J_0 我们从 A 的若当标准形着手，看它是否具有所要求的性质.

证明 设 P 是 n 阶可逆矩阵，使

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

这里 $J_i = J(\lambda_i, n_i)$，且 $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$.

先考虑若当块 J_i，有

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_i E_{n_i}$$

这里 E_{n_i} 表 n_i 阶单位阵(以下同).

令 $C_i = J_i - \lambda_i E_{n_i}$ $D_i = \lambda_i E_{n_i}$，则 C_i 是幂零阵，而 D_i 是对角形子阵，并且 $J_i = C_i + D_i (i = 1, 2, \cdots, s)$.

作准对角矩阵

$$N = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_s \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n E_{n_s} \end{pmatrix}$$

知 N 是幂零阵. M 是对角阵，且 $J = N + M$. 于是

$$A = PJP^{-1} = PNP^{-1} + PMP^{-1}$$

令 $C = PNP^{-1}, B = PMP^{-1}$ 则 $A = B + C$，易知 B, C 为所求.

此例较好地说明了利用若当标准形“过渡”. 经降阶处理后，达到了解决矩阵 A 本身问题的目的. 并且还可看到，要寻求具有某种特性的矩阵时，若当标准形以及它的若当块所起的作用是强有力的. 下面，再举一例.

例 7 数域 P 上任意 n 阶方阵 A,必可分解为两个复对称方阵的乘积,其中至少一个是满秩的,试证明之.

证明 设 A 相似于若当标准形 J,即有可逆方阵 P,使

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

这里 $J_i = J(\lambda_i, n_i)$, $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$.

若 $s=1$,则 J 为 n 阶若当块.

令 n 阶方阵 $Q=(e_n, e_{n-1}, \cdots, e_2, e_1)$,这里 e_j 是 n 维单位列向量 $(j=1,2,\cdots,n)$,显然有 $Q^1=Q$.

因 $\qquad Qe_1=e_n, Qe_2=e_{n-1}, \cdots, Qe_{n-1}=e_2, Qe_n=e_1$

故 $\qquad QQ=Q(e_n, e_{n-1}, \cdots, e_2, e_1)=E$. 于是得 $Q'=Q=Q^{-1}$. 经计算还有:$QJQ=J'$,即 $J=Q(J'Q)$. 令 $C_0=Q, D_0=J'Q$ 则有 $J=C_0D_0$.

显然 $\quad C'=Q'=Q=C_0$, C_0 是满秩对称阵,而

$$D_0'=(J'Q)'=Q'J=Q'(QJ'Q)=J'Q=D_0$$

故 D_0 也是对称阵,于是得

$$A=PJP^{-1}=(PC_0P')((P')^{-1}D_0P^{-1})=CD$$

其中取 $C=PC_0P'$ 是满秩对称阵,而 $D=(P^{-1})'D_0P^{-1}$ 是对称阵,结论成立.

再考虑 $s>1$ 的情况. 这时对 J 中每个若当块 J_i,仿 $s=1$ 的情况讨论,必有 n_i 阶对称阵 C_i 及 D_i 存在,其中 $|C_i|\neq 0$ 使 $J_i=C_iD_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$.

令 $\qquad M=\begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_s \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_s \end{pmatrix}$

$C=PMP', D=(P^{-1})'NP^{-1}$ 则有 $J=MN$，而 $A=PJP^{-1}=CD$，这里 $C'=(PMP')'=PMP'=C$，且 $|C|\neq 0$，$D'=((P^{-1})'NP^{-1})'=(P^{-1})'NP^{-1}=D$. 证毕.

例 8 设 A 是 n 阶方阵. 证明

(1) A 是幂零矩阵的充分必要条件是 A 的特征根全为零.

(2) 若 $A^m=0$，则行列式 $|A+E|=1$.

证明 (1)必要性 设 $A^m=0$. 因有可逆阵，使

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

这里 $J_i=J(\lambda_i, n_i)(i=1,2,\cdots,s)$，$\sum_{i=1}^{s} n_i=n$. 于是由 $A^m=0$ 可得 $J^m=0$，从而有

$$0 = J_i^m = \begin{pmatrix} \lambda_i^m & & & \\ & \lambda_i^m & & \\ * & & \ddots & \\ & & & \lambda_i^m \end{pmatrix}, \quad i=(1,2,\cdots,s)$$

故每个特征根 $\lambda_i=0(i=1,2,\cdots,s)$.

充分性 由 A 的特征根全为零. 它的每个若当块只能是如下的 n_i 阶子块：

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

应有 $J_i^{n_i}=0(i=1,2,\cdots,s)$. 取 $m=\max\{n_1,n_2,\cdots n_s\}$ 则有 $J_i^m=0$，$J^m=0$，最后有 $A^m=PJ^mP^{-1}=0$.

(2)由上面讨论，$A^m=0$，且 A 的一切特征根为零，于是 A 的若当标准形 J 的主对角线上的元素全为零，矩阵 $J+E$ 是主对角线上全是 1 的下三角矩阵. 即 $|J+E|=1$.

而 $$A+E=PJP^{-1}+E=P(J+E)P^{-1}$$

所以 $$|A+E|=|P(J+E)P^{-1}|=|J+E|=1.$$

此例体现了若当标准形在计算行列式上的应用.

例 9 设 A 是 n 阶方阵，秩 $A^k=$ 秩 A^{k+1}，且 A 有零特征根，证明零特征根对应的初等因子的次数不超过 k.

证明 设 P 是可逆方阵，A 的若当标准形为

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_0 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

其中 J_0 是 A 中所有特征根为 0 的若当块放在一起所成的子阵，其他若当块的特征根非零. 即 $|J_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$. 令 t 是 J_0 中最大块的阶数，只须证 $t\leqslant k$. 即可知结论正确.

用反证法，若 $t>k$，由上式

$$P^{-1}A^kP=\begin{pmatrix} J_0^k & & & \\ & J_1^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A^{k+1}P=\begin{pmatrix} J_0^{k+1} & & & \\ & J_1^{k+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^{k+1} \end{pmatrix}$$

因 $t>k$，故 $J_0^k\neq 0$ 且

$$秩(J_0^k)>秩(J_0^{k+1})$$

但 $J_1,\cdots,J_s$ 均非奇异(为满秩子块)，故有

$$\text{秩}(J_i^k)=\text{秩}(J_i^{k+1})(i=1,2,\cdots,s)$$

结合以上讨论有　秩$(A^k)>$秩(A^{k+1}). 这与假设矛盾. 这就证明了 J_0 中最大子块的阶数不超过 k，而 J_0 所含每个若当块的阶数恰等于相应的初等因子的次数，从而 A 的零特征根对应的初等因子的次数就不超过 k.

*§4　有理标准形

n 阶方阵 A 的若当标准形是通过其特征矩阵 $\lambda E-A$ 的初等因子得到的，因而与数域有关，我们只在复数域上讨论，且要求若当标准形还涉及到对多项式进行因式分解，这在实践上也是困难的.

本节将提出的有理标准形. 其特点是从 A 的不变因子着手，只须将 A 的元素进行若干次有理运算（加、减、乘、除）就可以得到.

一、有理标准形的概念及简单性质

定义 1　设 $d(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n\in P[\lambda]$，称矩阵

$$F=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{n-2}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}$$

为多项式 $d(\lambda)$ 的**友阵**（或**伴侣矩阵**，或弗罗本尼乌斯（Frobenius）块）.

$d(\lambda)$ 的友阵 F 有如下性质：

1. F 的阶数等于 $d(\lambda)$ 的次数；

2. $d(\lambda)$ 是其友阵 F 的唯一非常数不变因子（见 §1 例 6）；

3. 令 $F=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\alpha)$，则

(1) $e_i=Fe_{i-1}=F^{i-1}e_1(i=2,3,\cdots,n)$.

(2)$\alpha = Fe_n$.

定义 2 设 $d_1(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$ 是 n 阶方阵 A 的全部非常数不变因子，且

$$d_i(\lambda)=\lambda^{n_i}+a_{i1}\lambda^{n_i-1}+\cdots+a_{in_i}\quad(i=1,2,\cdots,s)$$

F_i 是 $d_i(\lambda)$ 的友阵. 则称 n 阶方阵

$$F=\begin{pmatrix}F_1&&&\\&F_2&&\\&&\ddots&\\&&&F_s\end{pmatrix}$$

为 A 的**有理标准形**(或弗罗本尼乌斯标准形).

定理 1 数域 P 上任何 n 阶方阵 A 必与它的有理标准形相似.

证明 设 A 的一切非常数不变因子为 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$，$d_i(\lambda)$ 的友阵是 $F_i(i=1,2,\cdots,s)$，则矩阵

$$F=\begin{pmatrix}F_1&&&\\&F_2&&\\&&\ddots&\\&&&F_s\end{pmatrix}$$

为 A 的有理标准形. 要证明 A 相似于 F，只须证明它们的特征矩阵等价即可.

事实上，若 $\partial(d_i(\lambda))=n_i\quad(i=1,2,\cdots,s)$，则 $\sum_{i=1}^{s}n_i=n$

并有

$$\lambda E_n-F=\begin{pmatrix}\lambda E_{n_1}-F_1&&&\\&\lambda E_{n_2}-F_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda E_{n_s}-F_s\end{pmatrix}$$

对每个子块 $\lambda E_{n_i}-F_i$ 来讲，它仅有唯一的非常数不变因子，于是

$$(\lambda E_{n_i}-F_i)\simeq\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&&&1&\\&&&&d_i(\lambda)\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,s$$

$$\lambda E_n-F\simeq\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&1&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&1&&&\\&&&&d_1(\lambda)&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&d_s(\lambda)\end{pmatrix}\simeq\lambda E_n-A$$

例 1 设 4 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}-2&2&-1&-1\\2&-2&-1&-1\\-1&-1&-2&2\\-1&-1&2&-2\end{pmatrix}$$

试求 A 的有理标准形 F.

解 经过对 $\lambda E-A$ 作初等变换，可得

$$\lambda E-A\simeq\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\lambda+4&\\&&&\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda-16\end{pmatrix}$$

故 A 的非常数不变因子为：

$$d_1(\lambda)=\lambda+4,\quad d_2(\lambda)=\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda-16$$

矩阵

$$F_1=(4),\quad F_2=\begin{pmatrix}0&0&16\\1&0&4\\0&1&-4\end{pmatrix}$$

分别为 $d_1(\lambda)$,$d_2(\lambda)$的友阵. 于是得到 A 的有理标准形

$$F=\begin{bmatrix}F_1&\\&F_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&16\\0&1&0&4\\0&0&1&-4\end{pmatrix}$$

定理2 若n阶方阵A仅有的非常数不变因子$d(\lambda)=[p(\lambda)]^k$,这里 $p(\lambda)\in P[\lambda]$,$p(\lambda)$的友阵是 F. 如果矩阵

$$M=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

与 F 同阶,则 A 相似于矩阵

$$G=\begin{pmatrix}F&&&&\\M&F&&&\\&M&F&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&M&F\end{pmatrix}$$

G 中 F 共有 k 块.

证明 我们只须证明 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-G$ 有相同的不变因子.

先考查 G 左下角那个 n-1 阶子式,其主对角线上全是 1. 主对角线以下全为零. 故 $\lambda E-G$ 的 $n-1$ 级行列式因子为 1,它的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)=|\lambda E-G|$,其余不变因子均为 1. 即 $d_n(\lambda)$是$\lambda E-G$ 的仅有的非常数不变因子. 且$|\lambda E-G|=d_n(\lambda)$.

其次,由于

$$\lambda E - G = \begin{pmatrix} \lambda E\text{-}F & & & \\ \text{-}M & \lambda E\text{-}F & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \text{-}M & \lambda E\text{-}F \end{pmatrix}$$

中，每个子块$\lambda E-F$仅有唯一的非常数不变因子$p(\lambda)$，故$d_n(\lambda)=|\lambda E-G|=[p(\lambda)]^k=d(\lambda)$.

例 2 已知矩阵 A 仅有非常数不变因子 $d(\lambda)=(\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda-4)^3$. 试求与 A 相似的定理 2 中的矩阵 G.

解 $p(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda-4$ 的友阵应是

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{又同阶矩阵 } M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故与 A 相似的矩阵

$$G=\begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ M & F & 0 \\ 0 & M & F \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & & & & & & \\ 1 & 0 & 3 & & & & & & \\ 0 & 1 & 2 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

推论 1 如果 n 阶方阵 A 仅有非常数不变因子 $d(\lambda)=(\lambda-a)^n$，则 A 相似于矩阵：

$$G=\begin{pmatrix} a & & & & \\ 1 & a & & & \\ & 1 & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a \end{pmatrix}$$

此时,矩阵 G 就是 A 的若当标准形.

推论 2 设 n 阶方阵 A 仅有的非常数不变因子 $d(\lambda)=[(\lambda-a)^2+b^2]^k$,这里 a,b 是实数,且 $b\neq 0$,则 A 相似于矩阵:

$$G=\begin{pmatrix} a & b & & & & & & \\ -b & a & \ddots & & & & & \\ 0 & 1 & a & b & & & & \\ 0 & 0 & -b & a & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 1 & a & b \\ & & & & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

证明 $p(\lambda)=(\lambda-a)^2+b^2=\lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2$. 它的友阵是

$$F=\begin{bmatrix} 0 & -a^2-b^2 \\ 1 & 2a \end{bmatrix}$$

令 $M^*=\begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,作 n 阶矩阵

$$G_1=\begin{pmatrix} F & & & & \\ M^* & F & & & \\ & M^* & F & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & M^* & F \end{pmatrix}$$

注意子块 M 与 M^* 仅在右上角有 1 与 $-b$ 的差别,仍可说明 $\lambda E-G_1$ 有 $n-1$ 级的行列式因子为 1,仿定理 2 的证明,易知 A 与矩阵 G_1 相似.

下面再证 G_1 与 G 相似,取二阶可逆阵

$$P_0=\begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{b} \\ 0 & -\frac{1}{b} \end{bmatrix},\quad \text{则 } P_0^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

于是 $P_0^{-1}FP_0=\begin{bmatrix}1 & a\\0 & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -a^2-b^2\\1 & 2a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{a}{b}\\0 & -\frac{1}{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}$

$$P_0^{-1}M^*P_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

令 n 阶矩阵

$$P=\begin{pmatrix}P_0 & & & \\ & P_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_0\end{pmatrix}$$

则 P 是 n 阶可逆阵，且 $P^{-1}G_1P=G$，结论得证.

在实数域上，矩阵 A 的初等因子总具有形式 $(\lambda-a)^k$ 或 $[(\lambda-a)^2+b^2]^l$，这里 $b\neq0$，所以在实数域上利用推论 2 去研究矩阵的标准形，特别有用.

二、应用举例

例 3 设 A 是 n 阶方阵，证明 $A=aE$（纯量矩阵）的充分必要条件是 A 的一切不变因子都是次数大于零的多项式.

证明 必要性显然成立. 下证充分性. 已知 A 的 n 个不变因子 $d_i(\lambda)\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 都是非常数的首一多项式，且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$，故只有形式

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_n(\lambda)=\lambda-a$$

诸 $d_i(\lambda)$ 的友阵均为一阶阵 (a)，因而方阵 A 的有理标准形

$$F=\begin{pmatrix}a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a\end{pmatrix}=aE$$

又设可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=aE$，故 $A=P(aE)P^{-1}=aE$.

例 4 设 A,B 都是数域 P 上 n 阶方阵，A 仅有非常数不变因子

$d(\lambda)=|\lambda E-A|$，证明：$AB=BA$ 的充分必要条件是有 P 上次数不超过 $n-1$ 的多项式 $g(\lambda)$，使 $B=g(A)$.

证明 若 $B=g(A)$，则 B 表成了 A 的多项式. 必有 $BA=AB$，充分性成立. 再证必要性. 记 A 的非常数不变因子

$$d(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

则 A 的有理标准形为

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\alpha)$$

且 $e_i=Fe_{i-1}=F^{i-1}e_1 \quad (i=2,3,\cdots,n),\alpha=Fe_n$ (1)

设可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=F$. 令 $B_1=P^{-1}BP$，我们先来证明有 P 上次数不超过 $n-1$ 的多项式 $g(\lambda)$ 使 $B_1=g(F)$.

因 $FB_1=P^{-1}APP^{-1}BP=P^{-1}ABP=P^{-1}BAP=B_1P^{-1}AP=B_1F$. 于是

$$\begin{aligned} B_1 &=B_1E=B_1(e_1,e_2,\cdots,e_n)=B_1(e_1,Fe_1,\cdots,F^{n-1}e_1) \\ &=(B_1e_1,F(B_1e_1),\cdots,F^{n-1}(B_1e_1)). \end{aligned}$$

又设 $B_1e_1=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'=\sum_{i=1}^{n}b_ie_i$. 代入上式，因 $e_i=F^{i-1}e_1$

故
$$\begin{aligned} B_1 &=\sum_{i=1}^{n}b_i(F^{i-1}e_1,F^ie_1,\cdots,F^{n+i-2}e_1) \\ &=\sum_{i=1}^{n}b_iF^{i-1}[e_1,Fe_1,\cdots,F^{n-2}e_1] \\ &=\sum_{i=1}^{n}b_iF^{i-1}[e_1,e_2,\cdots,e_n]=\sum_{i=1}^{n}b_iF^{i-1} \end{aligned}$$

令 $g(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}b_i\lambda^{i-1}$，则 $g(\lambda)\in P[\lambda]$ 且 $\partial(g(\lambda))\leqslant n-1$，使 $B_1=g(F)$.

于是

$$B=PB_1P^{-1}=P\left(\sum_{i=1}^{n}b_iF^{i-1}\right)P^{-1}=\sum_{i=1}^{n}b_i(PF^{i-1}P^{-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}b_iA^{i-1}$$

即 $\quad B=g(A)$

通过此例的证明过程可以看出，由有理标准形 $F=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\alpha)$ 的特殊结构，导出的两组计算公式(1)，对寻求所需多项式 $g(\lambda)$ 起了决定性的作用.

习　题

1. 把下列 λ-矩阵表成关于 λ 的多项式

(1) $\begin{bmatrix} \lambda^3+2\lambda+1 & 3\lambda^2 \\ 4\lambda+3 & -\lambda^3+5 \end{bmatrix}$，　(2) $\begin{bmatrix} 3\lambda^2+2 & \lambda+1 \\ 5\lambda^2+\lambda+3 & 4\lambda^2+3\lambda \end{bmatrix}$

2. 求 λ-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \\ 3 & \lambda^2+1 & 3 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

在有理数域，实数域，复数域上的初等因子.

3. 设 A 是 7 阶复矩阵，$\lambda E-A$ 的全部初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda-1,(\lambda-1)^2,\lambda+1,\lambda+2$ 求其不变因子.

4. 求 n 阶方阵 A 的若当标准形. 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

5. 求下列矩阵的若当标准形及有理标准形.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$，(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{pmatrix}$

6. A 是 n 阶方阵，且 $A^{50}=E$，证明在复数域上 A 相似于对角形矩阵.

7. 设 A 为 n 阶方阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式. 证明 A 与对角阵相似的充分必要条件是 $h(A)=0$. 其中

$$h(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(f(\lambda),f'(\lambda))}$$

$f'(\lambda)$是 $f(\lambda)$的导数.

8. 若方阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-2)^4(\lambda-3)^3$，它的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$，试写出 A 的一切可能的若当标准形.

9. 设 A 为 n 阶幂零矩阵，证明使 $A^k=0$ 的最小正整数 $k\leqslant n$.

10. 设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

证明 A 与 B 相似.

11. 若 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ E_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

试求：(1)A 的不变因子；

(2)A 的若当标准形.

12. 求矩阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$. 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

13. 设 A 是 n 阶方阵，且 $A^2=A$，证明：(1) A 与对角阵相似；(2) 秩 $A=\mathrm{Tr}A$.

14. 若 A 是 n 阶方阵. 矩阵 $E-A$ 的特征根的绝对值小于 1，证明 $0<|A|<2^n$.

15. 矩阵 A 的阶为 n，证明 A 的秩等于 r 的充分必要条件是 A 的初等因子中恰有 $n-r$ 个形如 λ^k.

16. 证明：n 阶方阵 A 相似于它的转置矩阵 A'.

17. 设 A 是 n 阶幂零阵. 证明 $A\pm E$ 是满秩方阵.

18. 在复数域中，n 阶方阵 A 的若当标准形里的 m 阶若当块是否可换为

$$\begin{pmatrix} a & & & & \\ c & a & & & \\ & c & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a \end{pmatrix}, \text{其中 } c\neq 0$$

19. A 是数域 P 上的 n 阶方阵. 证明下列条件相互等价：

(1) 存在正整数 m，使 $A^m=0$；

(2) A 的特征根全为零；

(3) A 相似于下三角形矩阵，其主对角线上元素全为零；

(4) A 的特征多项式是 λ^n.

第六章　二　次　型

§1　标准形

基本概念与结论

一、二次型的矩阵表示

1. 数域 P 上关于 n 个文字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**二次型**（简称二次型）的一般形式是：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j$$

其中 $a_{ij}\in P$. 若令 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,m)$，则二次型具有形式

$$f(x,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

把(1)的系数排成 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

称 A 为**二次型(1)的矩阵**，显然 A 是对称矩阵.

2. 二次型和它的矩阵是相互唯一确定的，二次型矩阵的秩称为**二次型的秩**.

3. 二次型(1)的矩阵表示为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，A 是(1)的矩阵.

二、矩阵的合同与二次型

1. A、B 都是数域 P 上的 n 阶方阵. 如果有 P 上可逆 n 阶方阵 C,使 $B=C'AC$,称 A 与 B **是合同的**. 合同关系具有反身性、对称性和传递性,且合同矩阵的秩相等.

2. 如果对矩阵 A 施行一次列初等变换再施行一次同样的行初等变换,则所得矩阵 B 与 A 合同. 对矩阵施行这种行列成对的初等变换叫做**矩阵的合同变换**.

3. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是两组文字. 系数在 P 中的一组关系式

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}y_j \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

称为**由** $x_1,x_2,\cdots,x_n$ **到** $y_1,y_2,\cdots,y_n$ **的一个线性替换**,简称线性替换. 它的矩阵形式记为

$$X=CY \tag{2}$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$,$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$ 而 $C=(c_{ij})_{n\times n}$为其系数构成的 n 阶方阵. 特别,当 C 是可逆方阵时,称(2)为**满秩**(又叫非退化)**线性替换**;**若** C **是正交方阵**($C'C=E$)**则称**(2)**是正交线性替换**.

4. 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 经过满秩线性替换 $X=CY$ 后,可变成新二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=Y'BY$ 的充要条件为 $B=C'AC$.

三、标准形与对称阵

1. 任意二次型都可经过一个满秩线性替换变成平方和的形式:

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2=(y_1,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}d_1 & & & 0\\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \tag{3}$$

称(3)是**原二次型的一个标准形**.

2. 二次型的标准形一般是不唯一的.

3.（主轴问题）实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$，都可以经过正交线性替换变成如下的平方和：

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2 \tag{4}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的全部特征根.

4. 对称阵有以下相应的性质：

(1) n 阶对称阵都合同于一个对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

(2) n 阶实对称阵 A，都存在一个 n 阶正交阵 T，使

$$T'AT=T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征根.

应用举例

一、化二次型为标准形的方法

求满秩线性替换 $X=CY$，使二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 化为标准形(3)的方法很多，最常用的有配方法，合同变换法（也称初等变换法），雅可比方法等. 对实二次型，还可用求 A 的特征根的方法.

下面将逐一介绍这些方法.

1. 配方法. 它的一般方法如下：

(1) 如果二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 含某文字例如 x_1 的平方项，即 $a_{11}\neq 0$，把含这个文字的项集中在一起进行一次配方，并作一次满

秩线性替换

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n \\ y_2 = \qquad\qquad x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \qquad\qquad\qquad x_n \end{cases} \qquad c_{ij} \in P$$

则 $f(x_1, \cdots, x_n) = d_n y_1^2 + F(y_2, \cdots, y_n)$，这里，$F(y_2, \cdots, y_n)$是 $y_2, \cdots, y_n$ 的二次型，对 $F(y_2, \cdots, y_n)$重复上述办法直到化为 $f(x_1, \cdots, x_n) = d_1 z_1^2 + \cdots + d_n z_n^2 (d_i \in P)$为止.

(2)如果二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$不含平方项，即 $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，但含某 $a_{ij} \neq 0$ 则可先作满秩线性替换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k \quad (k = 1, \cdots, n; k \neq i, j) \end{cases}$$

这时 $f(x_1, \cdots, x_n)$化为一个含平方项 y_i^2 的二次型，再用(1)的办法即可化 $f(x_1, \cdots, x_n)$为标准形.

(3)若 $f(x_1, \cdots, x_n)$进行了下列多次满秩线性替换，$X = CY, Y = DW, \cdots, U = TZ$ 化为 $F(z_1, \cdots, z_n) = d_1 z_1^2 + \cdots + d_n z_n^2 (d_i \in P)$其中 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \cdots, Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ 则 $f(x_1, \cdots, x_n)$经由满秩线性替换

$$X = (C\ D \cdots T)Z$$

化为标准形 $d_1 z_1^2 + \cdots + d_n z_n^2$.

(4)为了验证 $f(x_1, \cdots, x_n) = X' AX$是否经满秩线性替换 $X = CY$ 化为标准形

$$d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2 = (y_1, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} d_1 & & o \\ & \ddots & \\ o & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$. 可用 $C' AC =$

$\begin{pmatrix} d_1 & & o \\ & \ddots & \\ o & & d_n \end{pmatrix}$进行检验.

例 1 用配方法化二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形,并写出所用的满秩线性替换.

解 $a_{11}=2\neq 0$,将含 x_1 的项集中并配平方

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)]+3x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2] \\ &\quad +3x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

作满秩线性替换

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=y_1 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

即 $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X$$

有 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2+3y_3^2-4y_2y_3=2y_1^2+F(y_2,y_3)$重复上述步骤,把 $F(y_2,y_3)$中含 y_2 之项集中并作满秩线性替换

$$\begin{cases} y_1=z_1 \\ y_2-2y_3=z_2 \\ y_3=z_3 \end{cases}$$

有 $f(x_1,x_2,x_3)=2z_1^2+z_2^2-z_3^2$

下面来求出化 $f(x_1,x_2,x_3)$为标准形的满秩线性替换.

因 $Y=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}X$， $Z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}Y$

故 $X=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}Z=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z$

于是 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经满秩线性替换

$$\begin{cases}x_1=z_1-z_2-z_3\\x_2=\quad\quad z_2+2z_3\\x_3=\quad\quad\quad\quad z_3\end{cases}$$

化为标准形 $2z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

例 2 用满秩线性替换化下面二次型为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4-x_3x_4.$$

解 原二次型不含平方项，但 $a_{12}=\frac{1}{2}\neq 0$. 作满秩线性替换

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=\quad\quad\quad y_3\\x_4=\quad\quad\quad\quad y_4\end{cases}\quad 即\ X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Y$$

有 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3+2y_1y_4-y_3y_4$ 将含 y_1 之项集中并配方

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3,x_4)&=[y_1^2+2y_1(y_3+y_4)]-y_2^2-y_3y_4\\&=(y_1+y_3+y_4)^2-(y_3+y_4)^2-y_2^2-y_3y_4\\&=(y_1+y_3+y_4)^2-(y_3^2+y_4^2+3y_3y_4+y_2^2)\end{aligned}$$

作满秩线性替换

$$\begin{cases}z_1=y_1\quad\quad+y_3+y_4\\z_2=\quad\quad y_2\\z_3=\quad\quad\quad y_3\\z_4=\quad\quad\quad\quad y_4\end{cases}，\quad 即\ Z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Y$$

有 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=z_1^2-(z_3^2+z_4^2+3z_3z_4+z_2^2)$

再将含 z_3 之项集中并配方

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=z_1^2-[(z_3^2+3z_3z_4)+z_4^2+z_2^2]$$
$$=z_1^2-[(z_3+\frac{3}{2}z_4)^2-\frac{5}{4}z_4^2+z_2^2]$$

作满秩线性替换

$$\begin{cases}w_1=z_1\\w_2=\quad z_2\\w_3=\qquad z_3+\frac{3}{2}z_4\\w_4=\qquad\qquad z_4\end{cases},\quad 即 W=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\frac{3}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}Z$$

有 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=w_1^2-w_2^2-w_3^2+\frac{5}{4}w_4^2$. 于是 $f(x_1,x_2,x_3)$经满秩线性替换

$$X=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}W$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&-1&\frac{1}{2}\\1&-1&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}W$$

化为标准形 $w_1^2-w_2^2-w_3^2+\frac{5}{4}w_4^2$.

2. 合同变换法. 主要步骤如下:

(1)用二次型的矩阵 A 和同阶单位阵 E,作成 $2n\times n$ 型矩阵

$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$.

(2)对$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$中的 A 施行合同变换，将 A 化成对角矩阵，并对 A 施行与 E 相同的列初等变换.

(3)A 块化成的对角阵就是其标准形的系数矩阵，而 E 块演化的结果就是所用满秩线性替换的系数矩阵.

这个方法可图示为 $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{仅对 } E \text{ 施行与 } A \text{ 相应的列初等变换}]{\text{对 } A \text{ 施行矩阵的合同变换}} \begin{bmatrix} P'AP \\ P \end{bmatrix}$

例 3 用满秩线性替换 $X=CY$，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$$

化成标准形.

解 用合同变换法.

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2+1(2)]} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[2+1(2)]}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3+1(-2)]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{〔3+1(-2)〕}]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&3\\0&3&-6\\ \cdots&\cdots&\cdots\\1&2&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{〔3+2(3)〕}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&3\\0&0&3\\ \cdots&\cdots&\cdots\\1&2&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{〔3+2(3)〕}]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\\ \cdots&\cdots&\cdots\\1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

故满秩线性替换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

将二次型化为标准形　$f(x_1,x_2,x_3)=y_1{}^2-y_2{}^2+3y_3{}^2$

计算中要注意对 A 所施行的应是一系列的合同变换.

3. 雅可比(顺序主子式)法. 它的步骤是:

(1)计算二次型矩阵 $A=(a_{ij})$ 的顺序主子式

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}\quad(k=1,2,\cdots,n-1,n)$$

(2)若 $\Delta_k\neq0(k=1,2,\cdots,n\text{-}1)$,则二次型的标准形为 $\Delta_1y_1{}^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2{}^2+\cdots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}y_{n-1}{}^2+\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n{}^2$.

例 4　化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-8x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准形.

解 用雅可比方法.二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & -8 & -4\\ 1 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

顺序主子式:$\Delta_1=1,\Delta_2=-9,\Delta_3=0$.故二次型的标准形:$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-9y_2^2$

此法在条件 $\Delta_k\neq0\ (k=1,2,\cdots,n-1)$ 具备时,易于求出二次型的标准形.

4.特征根法. 它是用特殊的满秩线性替换——正交替换,化实二次型为标准形的方法,其步骤为:

(1)求出矩阵 A 的一切特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则二次型的标准形为:$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

(2)若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 A 的一切两两互异的特征根,对每个 λ_i,找出齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)X=0$ 的基础解系 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in_i}(i=1,2,\cdots s)$.

(3)将 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots\alpha_{in_i}$ 单位化正交化后,可得一组正交单位向量 $\{\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots\eta_{in_i}|i=1,2,\cdots s\}$,它们就是通常所谓的"主轴".

(4)作 n 阶矩阵 $T=(\eta_{11},\cdots,\eta_{1n_1},\eta_{21},\cdots,\eta_{2n_2},\cdots,\eta_{s1},\cdots,\eta_{sn_s})$ 则 $X=TY$ 就是所用的正交线性替换.

例 5 (1)用正交线性替换 $X=TY$,将二次型
$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+6x_2^2+8x_1x_3+2x_3^2$ 化成标准形;

(2)若 $f(x_1,x_2,x_3)=X'AX=1$,它是什么二次曲面?

解 (1)所给二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

则 $|\lambda E-A|=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$，故二次型的标准形是

$$6y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$$

再求所用的正交替换的矩阵 T：

对 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 齐次线性方程组 $(6E-A)X=0$ 的基础解系是

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad a_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

同理，对于 $\lambda_3=-2$ 齐次线性方程组 $(-2E-A)X=0$ 的基础解系为 $a_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

将 a_1、a_2、a_3 正交化、单位化后得向量组

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

令 $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则正交线性替换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

将所给二次型化成 $6y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$.

(2) 当 $X'AX=6y_1^2+6y_2^2-2y_3^2=1$ 时，它表示单叶双曲面.

值得注意的是，矩阵 T 中列向量排列的顺序与标准形中系数(即特征根)的顺序应一致. 例如上例中 η_1、η_2 是属于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的特征向量. 故标准形中 y_1^2，y_2^2 的系数应为 6.

另外，对实二次型来讲，上述四种方法都可用来求它的标准形，但对任意数域上的二次型第四个方法却不能引用. 雅可比法、配方法都不能在得到标准形的同时得到所用的线性替换 $X=CY$.

而合同变换法却可以在得到标准形的同时得到所需要的线性替换，所以在求满秩线性替换化二次型为标准形时，多采用合同变换法，然而在实际化一个二次型为标准形时，却要根据具体情况选择恰当的变换法，我们看下例.

例6 化二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$$

为标准形.

分析 通过线性替换把每个乘积项都化为平方差的形式，从而使二次型化成标准形.

解 作线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 & & + y_{2n} \\ \cdots & \ddots \quad & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ x_n = & y_n + y_{n+1} & \\ x_{n+1} = & y_n - y_{n+1} & \\ \cdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \quad & \ddots \\ x_{2n} = y_1 & & - y_{2n} \end{cases}$$

则 $$f(x_1,\cdots,x_{2n})=y_1^2+\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2-\cdots-y_{2n}^2 \qquad (10)$$

因所作线性替换的行列式等于$(-2)^n$，是满秩的，故(10)式就是二次型的标准形.

例7 证明下列矩阵合同.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} \lambda_{i1} & & & \\ & \lambda_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{in} \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{in}$是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的一个排列.

此例可直接用合同的定义，寻求可逆 n 阶方阵 C，使 $B=C'AC$；也可以证明相应的二次型 $X'AX$，$X'BX$ 可以经非退化线性替换相互转化，于是 A 与 B 合同，现在用后一种证法.

证明 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$

取满秩线性替换

$$\begin{cases} x_{i1} = y_1 \\ x_{i2} = \quad y_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{in} = \qquad y_n \end{cases}$$

则　　$f(x_1,\cdots,x_n)=\lambda_{i1}y_1{}^2+\cdots+\lambda_{in}y_n{}^2=Y'BY$

故 B 与 A 合同.

二、实二次型与实对称阵

例 8　若 A 为 n 阶实对称阵，$A^2=0$，证明 $A=0$.

证明　A 为实对称阵，故有正交方阵 T 使

$$T'AT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的一切特征根，而且 λ_i 是实数，于是

$$0=T'A^2T=(T'AT)^2=\begin{pmatrix} \lambda_1{}^2 & & & \\ & \lambda_2{}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n{}^2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_i{}^2=0$，就有 $\lambda_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$，从而 $A=0$.

例 9　设 n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

证明　在 $\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2=1$ 的条件下，二次型的最大值恰等于 A 的最大特征根.

分析　涉及特征根，容易联想到实对称阵正交合同(或正交相似)及由它的一切特征根构成的对角矩阵. 本例就从此着手.

证明　若正交线性替换 $X=TY$，使

$$f(x_1,\cdots,x_n)=Y'T'ATY=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征根. 令其中最大者是 $\lambda_t(1\leqslant t\leqslant n)$. 下面证明二次型的最大值也是 λ_t.

由于 $X'X=\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$,对任意 n 维列向量 Y,必有 $Y'Y=Y'T'TY=(TY)'TY=X'X=1$. 于是

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2\leqslant\lambda_t\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\lambda_t Y'Y=\lambda_t$$

若取列向量 Y_t,使其分量满足

$$y_i=\begin{cases}1, & i=t\\ 0, & i\neq t\end{cases}$$

于是 $f(x_1,\cdots,x_n)=Y_t'T'ATY_t=\lambda_t$. 结论得证.

例 10　A 是 n 阶实对称阵,且 $|A|<0$. 证明:存在实 n 维向量 X,使 $X'AX<0$.

证明　设正交矩阵 T,使

$$T'AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

因 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n<0$,其中至少有一个 λ 小于零,不妨设 $\lambda_i<0$,于是令　$X=Te_i$,这里 $e_i=(0,\cdots,\overset{(i)}{1},\cdots,0)'$,则

$$X'AX=e_i'T'ATe_i=\lambda_i<0$$

注意　估计实二次型的取值范围,或者求它的某个特殊的值,在应用上是比较重要的,以上两例为我们提供的方法是:利用二次型矩阵 A 的特征根作系数的标准形,再适当选择 n 维向量 Y 即可.

例 11　设 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 是实二次型,有向量 $\alpha=(y_1,\cdots,y_n)'$,$\beta=(z_1,\cdots,z_n)'$ 使 $f(\alpha)>0,f(\beta)<0$,证明存在两个无关的向量 $\xi=(u_1,\cdots,u_n)'$,$\eta=(v_1,\cdots,v_n)'$ 使 $f(\xi)=f(\eta)=0$.

证明 令 $\gamma=\alpha+k\beta$，使 $f(\gamma)=0$，其中 k 是实数，我们将通过适当选择 k 的值的方法来求所需的 ξ 和 η.

$$f(\gamma)=\gamma' A\gamma=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(y_i+kz_i)(y_j+kz_j)=k^2(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_iz_j)+k$$

$$(\sum_{i,j=1}^{n}2a_{ij}y_iz_j)+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j=0.$$

由 $f(\alpha)>0$，$f(\beta)<0$ 知. 判别式

$$(2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iz_j)^2-4(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j)(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_iz_j)>0$$

故上式作为 k 的多项式应有两个不同的实根，设为 k_1 和 k_2 且 $k_1\neq k_2$.

令 $\xi=\alpha+k_1\beta$，$\eta=\alpha+k_2\beta$，显然 $f(\xi)=f(\eta)=0$，再证 ξ 与 η 是线性无关的.

事实上，α 与 β 线性无关. 若不然可设 $l\neq0$，使 $\alpha=l\beta$，于是 $f(\alpha)=\alpha' A\alpha=l^2\beta' A\beta>0$，$l^2>0$ 则

$$f(\beta)=\beta' A\beta>0$$

与题设矛盾. 故 α 与 β 线性无关. 从而二阶子式

$$\begin{vmatrix} y_i+k_1z_i & y_j+k_1z_j \\ y_i+k_2z_i & y_j+k_2z_j \end{vmatrix}=(k_1-k_2)(z_iy_j-z_jy_i)\neq0$$

这就证明了 ξ 与 η 是线性无关的.

§2 规 范 形

基本概念与结论

一、规范形

1. 复二次型（系数是复数），经过适当的复满秩线性替换可化成 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$，这里 r 是二次型的秩，称为此**复二次型的规范形**. 规范形是唯一的.

2.（惯性定律）实二次型，经过适当的实满秩线性替换可化成

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2 \tag{11}$$

其中 r 是二次型的秩，称(11)式为**此实二次型的规范形**，规范形是唯一的.

3. 实二次型的规范形中正平方项的个数 p，称为它的**正惯性指数**；负平方项个数 q 称为它的**负惯性指数**；二者的差 $s=p-q=p-(r-p)=2p-r$ 称为它的**符号差**

二、对称阵的几个性质

1. 秩为 r 的复对称阵合同于对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}_{r} & \\ & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 两个复对称阵合同的充分必要条件是二者的秩相等.

3. 秩为 r 的实对称阵合同于下面的对角矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

（1 共 p 个，-1 共 q 个）

这里 $p+q=r$.

4. 两个实对称阵合同的充分必要条件是它们有相同的秩和相同的符号差(指以此实对称阵为矩阵的实二次型的符号差).

应用举例

例1 设实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 的正、负惯性指数分别为 p 和 q,证明:对任给的 p 个正数 $a,a_2,\cdots,a_p$ 和 q 个负数 $b_1,b_2,\cdots,b_q$,存在满秩线性替换化二次型为

$$a_1y_1{}^2+a_2y_2{}^2+\cdots+a_py_p{}^2+b_1y_{p+1}^2+\cdots+b_qy_{p+q}^2$$

证明 首先有满秩线性替换 $X=C_1Z$,使

$$C_1'AC_1=\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

又令 n 阶方阵

$$C_2=\begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \sqrt{a_p} & & & & & & \\ & & & \sqrt{-b_1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \sqrt{-b_q} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

则 $X=C_1C_2Y$ 是满秩线性替换,并有

$$\begin{aligned} f(x_1,\cdots,x_n)&=X'AX=Y'C_2'C_1'AC_1C_2Y \\ &=a_1y_1{}^2+\cdots+a_py_p{}^2+b_1y_{p+1}^2+\cdots+b_qy_{p+q}^2 \end{aligned}$$

此例说明实二次型的标准形可以有无数个,而惯性指数 p,q

及符号差 s 才是实二次型的"不变量".

例 2 求二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}x_jx_k$$

的符号差.

解 设二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的矩阵为 A,那么

$$A=\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-n)^{n-1}$$

故 A 有 n 个特征根 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=n,\lambda_n=0$.

又二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$,它的符号差

$$s=(\text{正特征根的个数})-(\text{负特征根的个数})=n-1.$$

例 3 实二次型可分成两个实一次齐式(线性型)的乘积的充分必要条件是它的秩等于 2 且符号差为零,或者秩为 1.

证明 充分性 若 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 是秩为 2 且符号差为零的实二次型,则 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 可经过满秩线性替换 $X=CY$ 化为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$$

由 $Y=C^{-1}X$ 知 y_1,y_2 都可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示,代入上式可知,二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的两个一次齐式的乘积.

若 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的秩是 1,则它的规范形为 y_1^2. 据同样的道理知结论成立.

必要性 设二次型已分解成

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)$$

若 $b_i=ka_i(i=1,2,\cdots,n)$,即 $(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,\cdots,b_n)$ 成比例,不妨设 $a_1\neq 0$,令

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则它是满秩线性替换，并将二次型化成

$$f(x_1, \cdots, x_n) = ky_1^2$$

此时秩为1. 若$(a_1, \cdots, a_n)$，$(b_1, \cdots, b_n)$不成比例，不妨设$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$，则对二次型$f(x_1, \cdots, x_n)$连续进行下列满秩线性替换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n \\ y_i = x_i, i = 3, \cdots, n \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_i = z_i, i = 3, \cdots, n \end{cases}$$

得 $f(x_1, \cdots, x_n) = y_1y_2 = z_1^2 - z_2^2$，故它的秩为2且符号差是零.

例4 证明实二次型

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{ij} + i + j)x_ix_j$$

的秩和符号差都与λ无关($n \geq 2$).

证明 $f(x_1, \cdots, x_n)$的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+3 & 3\lambda+4 & \cdots & n\lambda+(n+1) \\ 2\lambda+3 & 4\lambda+4 & 6\lambda+5 & \cdots & 2n\lambda+(n+2) \\ 3\lambda+4 & 6\lambda+5 & 9\lambda+6 & \cdots & 3n\lambda+(n+3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n\lambda+(n+1) & 2n\lambda+(n+2) & 3n\lambda+(n+3) & \cdots & n^2\lambda+2n \end{pmatrix}$$

若能证明A与一个不含λ的矩阵合同，就证明了结论. 依次把A的第一行的(-2)，(-3)，$\cdots$，$(-n)$倍加到第$2, 3, \cdots, n$行上，得矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+3 & 3\lambda+4 & \cdots & n\lambda+(n+1) \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n \\ -2 & -4 & -6 & \cdots & -2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(n-1) & -2(n-1) & -3(n-1) & \cdots & -n(n-1) \end{pmatrix}$$

再把 B 的第一列的 $(-2),(-3),\cdots,(-n)$ 倍依次加到第 $2,3,\cdots,n$ 列上，就得到与 A 合同的矩阵

$$C=\begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & -2 & \cdots & -(n+1) \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

最后，把 C 的第二行的 $\frac{1}{2}(\lambda+2),(-2),\cdots,-(n-1)$ 倍依次加到第 $1,3,4,\cdots,n$ 行上，同时紧接着再作同样的列的初等变换，便得到与 A 合同的矩阵

$$D=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故原二次型可经满秩线性替换化成

$$f(x_1,\cdots,x_n)=-2y_1y_2$$

由此易知它的秩是 2，符号差为零，且与 λ 无关.

例 5 设二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+t}^2,$$

其中 $l_i(i=1,2,\cdots,s+t)$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的实一次齐式，证明实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数 $p\leqslant s$，负惯性指数 $q\leqslant t$.

证明 设 $l_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(i=1,2,\cdots,s+t)$，二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 经满秩线性替换 $X=C^{-1}Y$（或 $Y=CX$）化成规范形

$$f(x_1,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

其中 $r=p+q$ 是二次型的秩，$C=(c_{ij})$，于是

$$l_1^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+t}^2=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-$$

$$\cdots - y_{p+q}^2 \tag{14}$$

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} l_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_s = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \\ y_{p+1} = c_{p+1,1}x_1 + c_{p+1,2}x_2 + \cdots + c_{p+1,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{15}$$

若 $p>s$，方程组(15)所含方程的个数

$$s+(n-p)=n+s-p<n,$$

故(15)有非零解，设为$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，代入(14)式，由

$$l_1=l_2=\cdots=l_s=0, y_{p+1}=\cdots=y_n=0$$

得到
$$-l_{s+1}{}^2-\cdots-l_{s+t}{}^2=y_1{}^2+\cdots+y_p{}^2$$

从而
$$y_1=\cdots=y_p=0$$

这说明
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

即线性方程组 $CX=0$ 有非零解，于是$|C|=0$ 这与 $X=CY$ 是满秩线性替换相违，矛盾. 故 $p\leqslant s$.

同理可证 $q\leqslant t$.

此例告诉我们. 即使二次型已具有平方和的形式，但它所含的正平方项的个数未必是该二次型的正惯性指数 p.

例 6 设二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X'AX$，当秩 A 为 n 时，称之为**满秩二次型**，称下面的二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j=X'A^{-1}X$$

为原二次型的逆式，其中 A_{ij}为行列式$|A|$中 a_{ij}的代数余子式. 证明

一个满秩的实二次型和它的逆式有相同的符号差，同时它们的正、负惯性指数都相等.

证明 证明它们有相同的规范形.

由于 $f(x_1,\cdots x_n)=X'AX$ 是满秩的，故有满秩线性替换 $X=CY$，将它化为规范形.

$f(x_1,\cdots,x_n)=(CY)'A(CY)=Y'DY=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_n^2$

其中 $D=C'AC=\begin{bmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_{n-p} \end{bmatrix}$

又 C 是满秩的，故它的转置矩阵 C' 也是满秩阵，作满秩线性替换 $X=(C')^{-1}Y$，可将二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的逆式化成：

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j&=X'A^{-1}X=((C')^{-1}Y)'A^{-1}(C')^{-1}Y\\&=Y'C^{-1}A^{-1}(C')^{-1}Y\\&=Y'(C'AC)^{-1}Y=Y'D^{-1}Y\end{aligned}$$

注意 $D^{-1}=D$，故原二次型与其逆式有相同的规范形，从而有相同的正、负惯性指数和符号差.

用矩阵的语言，此例的结论可改述为，实满秩对称阵与其逆矩阵是合同的.

§3 正定二次型和正定矩阵

基本概念与结论

一、基本概念

1. 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，如果对任一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，都有 $f(c_1,\cdots,c_n)>0$ 称它为**正定二次型**.

2. 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，对任意一组不全为零的

实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，如果都有 $f(c_1,\cdots,c_n)\geqslant 0$ 那么 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 称为**半正定的**；如果都有 $f(c_1,\cdots,c_n)<0$，称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为**负定的**；如果都有 $f(c_1,\cdots,c_n)\leqslant 0$，则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ **为半负定的**；如果它既不是半正定，又不是半负定，那么就称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为**不定的二次型**.

3. 设 A 是 n 阶实对称矩阵. 如果由它确定的二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 是正定的，半正定的，负定的或半负定的，就分别称 A **是正定的，半正定的，负定的或半负定的矩阵**.

二、判别条件

1. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 为实二次型，则以下条件等价：

(1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定二次型；

(2) 矩阵 A 是正定矩阵；

(3) 正惯性指数 $p=n$；

(4) A 与单位阵合同；

(5) A 的一切顺序主子式大于零；

(6) A 的特征根全为正.

2. $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 是实二次型，则二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是负定的充分条件是 $-f(x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的二次型.

应用举例

一、关于判别条件

例 1 求 λ 的值，使二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2\lambda x_2x_3$$

是正定的，并讨论 $\lambda\geqslant 1$ 的情况.

解 二次型的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & \lambda\\ -1 & \lambda & 3\end{pmatrix}$$

如果二次型是正定的，它的矩阵 A 的各级顺序主子式都应为正，即

$$\Delta_1=1>0, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1>0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & \lambda\\ -1 & \lambda & 3\end{vmatrix}=1-2\lambda-\lambda_2>0$$

解之得，当 $-1-\sqrt{2}<\lambda<-1+\sqrt{2}$ 时，二次型为正定.

若 $\lambda\geqslant 1$，$\Delta_3=|A|<0$，而 Δ_1,Δ_2 为正，故二次型的符号差为 1，它是不定二次型.

例 2 若 $A=(a_{ij})$ 是正定矩阵，则 $a_{ii}>0$.

证法一 用正定二次型.

因 A 是正定矩阵，$f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 是正定二次型，在列向量 $X=(x_1,\cdots,x_n)'$ 中，取 $x_i=1$，其余 $x_j=0(i\neq j)$，则有

$$f(0,\cdots 0,\overset{(i)}{1},0,\cdots 0)=a_{ii}>0.$$

证法二 用 A 与单位阵合同.

因 A 是正定矩阵，有可逆方阵 P 使

$$A=P'EP=P'P$$

令 $P=(p_{ij})$，则有 $\quad a_{ii}=p_{1i}{}^2+p_{2i}{}^2+\cdots+p_{ni}{}^2>0$.

注意 例 2 的逆命题不成立. 如例 1 中二次型的矩阵，对角线上元素全为正，但当 $\lambda\geqslant 1$ 时，二次型不是正定的.

然而利用例 2 来否定正定型，却是简单易行的，例如二次型 $f(x_1,x_2)=x_1{}^2-4x_1x_2-4x_2{}^2$ 就不是正定的，因有 $a_{22}=-4<0$.

例 3 设 n 阶方阵 A 与 B 是正定的，证明 $A^{-1}, A+B, kA(k>0)$ 及 A^* 都是正定阵.

证明 (1)由 A 正定，二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 必正定，由§2 例 6 知，它的逆式 $X'A^{-1}X$ 与之有相同的惯性指数和秩，故 A^{-1} 是正定的.

(2)设 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$，$g(x_1,\cdots,x_n)=X'BX$，因 A 与 B 是正定阵，对任一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 均有 $f(c_1,\cdots,c_n)>0$，$g(c_1,\cdots,c_n)>0$.

又 $(A+B)'=A'+B'=A+B$. $A+B$ 是实对称阵且二次型
$f(x_1,\cdots,x_n)+g(x_1,\cdots,x_n)=X'AX+X'BX=X'(A+B)X$ 恒有
$f(c_1,\cdots,c_n)+g(c_1,\cdots,c_n)>0$. 故 $X'(A+B)X$ 是正定二次型，所以 $A+B$ 为正定矩阵.

(3)因 A 是正定矩阵，故其顺序主子式

$$\Delta_t=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tt} \end{vmatrix} \qquad t=1,2,\cdots,n$$

均为正，应有 $k\Delta_t>0(t=1,2,\cdots,n)$，它们是矩阵 kA 的一切顺序主子式，故 kA 是正定矩阵.

(4)因 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，故 $A^*=|A|A^{-1}$. 由 A 正定，有 $|A|>0$，由上述(1)与(3)知 A^* 也是正定矩阵.

本例在证明中，针对给定矩阵的特点，选择了切合实际的证明方法，例如对(2)若采用证明 $A+B$ 的顺序主子式全大于零的方法，就比较困难，对 A^* 选择任一判别条件直接证明都不容易，这里采取了间接的利用已有结论的办法.

例 4 设 A 是 n 阶实方阵，证明：A 是正定矩阵的充分必要条件是存在满秩实方阵 P，使 $A=P'P$.

证明 必要性 若 A 是正定矩阵，它合同于单位矩阵 E，设可逆矩阵 Q 使，$Q'AQ=E$，则有 $A=(Q')^{-1}EQ^{-1}=P'P$，其中 $P=Q^{-1}$是满秩实方阵.

充分性 若 P 是实可逆矩阵，且 $A=P'P$. 首先 $A'=(P'P)'=P'P=A$；A 是实对称阵，且 $A=P'EP$，A 与 E 合同，故 A 是正定矩

阵.

例 5 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$,则以下诸命题等价

(1)$f(x_1,\cdots,x_n)$是半正定二次型;

(2)A 的正惯性指数 p 等于 A 的秩 r;

(3)A 的一切特征根 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$;

(4)有实矩阵 P 使 $A=P'P$.

证明 (1)⇒(2) 用反证法 若 $r>p$. 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 经满秩线性替换 $X=CY$,化成规范形

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

取 $Y_0=(0,\cdots,0,\overset{(p+1)}{1},0,\cdots,0)'$,只有第$(p+1)$个分量为 1,令 $X_0=CY_0$ 则 $X_0'AX_0=-1<0$,与二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$是半正定矛盾,故 $p=r$.

(2)⇒(3)已知 A 的正惯性指数 $p=r$,由惯性定律可知,二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$经正交线性替换 $X=TY$ 化成的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 均大于 0,而 $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$.

(3)⇒(4)二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 的矩阵 A 为实对称阵,必有正交阵 T 使

$$T'AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&&& \\ &\lambda_2 &&&&& \\ &&\ddots &&&& \\ &&&\lambda_r &&& \\ &&&&0&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&0\end{pmatrix}$$

且诸 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$取 n 阶矩阵

$$D=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt{\lambda_r} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}$$

显见 D 是实对称矩阵，并有

$$A=(T')^{-1}D^2T^{-1}=(DT^{-1})'(DT^{-1})$$

令 $P=DT^{-1}$，则 P 是实对称阵，且 $A=P'P$.

(4)⇒(1) 已知 $A=P'P$. P 是实对称阵，任取一非零 n 维实向量 $X_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})'$

则 $$f(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})=X_0'AX_0=(PX_0)'(PX_0)\geqslant 0$$

故二次型是半正定的.

需要注意的是：实二次型在一切顺序主子式大于或等于零时，未必是半正定的. 例如二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

它的顺序主子式：

$$\Delta_1=1>0,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&1\end{vmatrix}=0$$

但 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+2x_3)^2-3x_3^2$. 它不是半正定的二次型.

例 6 设 A,B 都是 n 阶正定矩阵. 证明：

(1) AB 的特征根全大于零；

(2) 若 $AB=BA$，则 AB 是正定阵；

(3) 设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，记 $C=A\times B=(c_{ij})$，其中 $c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$，$(i,j=1,2,\cdots,n)$ 则 C 也是正定矩阵，一般称 C 为阿达马乘积.

证明 (1) 已知 A,B 都是正定阵，存在可逆矩阵 P 和 Q，使 $A=P'P$，$B=Q'Q$，于是

$$Q(AB)Q^{-1}=QP'PQ'(QQ^{-1})=(PQ')'(PQ')$$

PQ' 是可逆方阵，故矩阵 $Q(AB)Q^{-1}$是正定矩阵，它的一切特征根大于零，但 AB 与此矩阵相似，故矩阵 AB 的一切特征根都大于零.

(2)由(1)知 AB 的特征根全为正，又 AB 是实矩阵，且有$(AB)'=B'A'=BA=AB$，故 AB 是实对称矩阵，因而是正定矩阵.

(3)$c_{ij}=a_{ij}b_{ij}=a_{ji}b_{ji}=c_{ji}$，$(i,j=1,2,\cdots,n)$，故 $C=(c_{ij})$是实对称矩阵. 现证二次型 $X'CX$ 是正定的. 因 B 是正定阵，设可逆矩阵 $Q=(q_{ij})$，使 $B=Q'Q$，于是 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}q_{ki}q_{kj}$且二次型

$$X'CX=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\sum_{k=1}^{n}q_{ki}q_{kj}x_ix_j$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(q_{ki}x_i)(q_{kj}x_j)$$

令 $Y_k=(q_{k1}x_1,q_{k2}x_2,\cdots,q_{kn}x_n)'$ $(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$X'CX=\sum_{k=1}^{n}Y_k'AY_k$$

设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 是非零列向量，它的第 t_k 个分量 $x_{t_k}\neq0$，又矩阵 $Q=(q_{ij})$是可逆的，它的第 t_k 列上的元素应不全为零，不妨设 $q_{s_kt_k}\neq0$，于是 $q_{s_kt_k}x_{t_k}\neq0$，向量 $Y_{s_k}\neq0$. 由 A 是正定矩阵. 必有

$Y_{s_k}AY_{s_k}>0$，$X'CX=\sum_{k=1}^{n}Y_k'AY_k>0$. 所以 C 是正定矩阵.

用两个正定矩阵作一个正定阵，前面(见例 3)已介绍了用和的方法，本例提供的利用矩阵的两种求积的方法，也能得到正定矩阵. 但是正定矩阵应该是实对称阵，故没有具备条件 $AB=BA$ 的矩阵 AB，不能肯定是正定矩阵，请予以重视.

二、正定矩阵与半正定矩阵

例 7 对任何实数 $\lambda,\mu>0$，试证：

(1)若 A,B 都是半正定的矩阵，则 $C=\lambda A+\mu B$ 是半正定矩阵；

(2)如果 A,B 之一为正定，另一是半正定，那么 C 是正定矩

阵.

证明 (1)任取非零向量 X,则

$$X'CX=X'(\lambda A+\mu B)X$$
$$=\lambda X'AX+\mu X'BX\geqslant 0$$

故 C 是半正定的.

(2)不妨设 A 正定,B 为半正定,对非零的向量 X,应有 $X'AX>0$,$X'BX\geqslant 0$,故

$$X'CX=\lambda X'AX+\mu X'BX>0$$

故 C 是正定矩阵.

例 8 证明:若 A 是实对称矩阵.则 A 是半正定矩阵的充分必要条件是对任何实数 $\mu>0$,$B=\mu E+A$ 是正定的.

证明 必要性可由例 7 直接得到,这里再给另一证明(用特征根方法)因 $|\lambda E-B|=|(\lambda-\mu)E-A|$,若 λ 是 B 的特征根,则 $\lambda-\mu$ 为 A 的特征根.但 A 半正定,故 $\lambda-\mu\geqslant 0$,$\lambda\geqslant\mu>0$,由 λ 的任意性知,B 的一切特征根为正,故 B 是正定矩阵.

充分性 由 $\lambda E-A=\lambda E-(B-\mu E)=(\lambda+\mu)E-B$.于是 $|\lambda E-A|=|(\lambda+\mu)E-B|$,若 λ 是 A 的特征根,则 $\lambda+\mu$ 是 B 的特征根,B 是正定矩阵,所以对任何正实数 μ 都有 $\lambda+\mu>0$,故 $\lambda\geqslant 0$,A 是半正定的.

对充分性的证明,还可用反证法.若 A 不是半正定的,必存在非零实列向量 X,使

$$X'AX<0$$

但 $\quad X'BX=X'(\lambda E+A)X=\mu X'X+X'AX>0$

若取 $\quad \mu=\dfrac{-X'AX}{X'X}$

则 $\mu>0$,使 $X'BX=0$,这与 B 是正定矩阵矛盾.所以 A 是半正定矩阵.

例 9 若 A 为 n 阶正定矩阵,B 是同阶半正定阵,证明

$$|A+B|\geqslant|A|$$

证明 由 A 是正定矩阵知. 有可逆矩阵 P,使 $P'AP=E$,又因与半正定合同的矩阵仍为半正定的,故 $B_1=P'BP$ 半正定. 因而 B_1 是实对称阵,且存在正交阵 T,使

$$T'B_1T=T'P'BPT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=D$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 B_1 的全部特征根,且应有 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$. 注意正交阵 T 的性质 $T'T=E$ 及

$$P'(A+B)P=P'AP+P'BP=E+P'BP$$

两端取行列式,于是

$$\begin{aligned}|P'||A+B||P|&=|E+P'BP|=|T'||E+P'BP|T|\\&=|E+T'B_1T|=|E+D|\\&=\left|\begin{pmatrix}1+\lambda_1 & & & \\ & 1+\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1+\lambda_n\end{pmatrix}\right|\geqslant 1\end{aligned}$$

从而 $\quad |A+B|\geqslant|P'|^{-1}|P^{-1}|=|(P')^{-1}P^{-1}|=|A|$.

例10 设 A 是 n 阶正定(半正定)矩阵,m 是任一正整数,证明存在唯一的正定矩阵(半正定矩阵)B,使 $A=B^m$.

当 $m=2$ 时,称 B 是 A 的**平方根**.

证明 只就 A 是 n 阶正定矩阵来证明,可类似地证明半正定的情况.

(1)存在性 因 A 是正定矩阵,当然是实对称阵,故有正交阵 T,使

$$A=T'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}T$$

其中诸 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，它们是 A 的特征根.

令 $$B=T'\begin{pmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt[m]{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt[m]{\lambda_n}\end{pmatrix}T$$

则 $B'=B$ 是实对称阵且 B 的一切特征根为正，即 $\sqrt[m]{\lambda_i}>0(i=1,2,\cdots,n)$. 故 B 为正定阵，并有 $A=B^m$.

（2）唯一性　令设正定矩阵 B 和 C，都满足条件：$A=B^m$，$A=C^m$.

首先证明矩阵 B 和 C 有共同的特征根以及属于它们的特征向量. 任取 B 的特征根 μ. 则 $\mu>0$，且有特征向量 α 使，$B\alpha=\mu\alpha$. 于是

$$A\alpha=B^m\alpha=\mu^m\alpha,\quad (\mu^mE-A)\alpha=0$$

将 $A=C^m$ 代入有　$(\mu^mE-C^m)\alpha=0$

令　$D=\mu^{m-1}E+\mu^{m-2}C+\cdots+C^{m-1}$，由 $\mu>0$ 及 C 是正定阵. 应用例 7 的结论可知，D 也应为正定矩阵，并有

$$O=(\mu^mE-C^m)\alpha=D(\mu E-C)\alpha$$

故 $(\mu E-C)\alpha=0$，即 $C\alpha=\mu\alpha$，μ 是 C 的特征根且 α 也是 C 的属于 μ 的特征向量. 反之，令 μ 为 C 的特征根，α 为 C 的属于 μ 的特征向量. 用类似方法可证 μ 是 B 的特征根，α 是 B 的属于 μ 的特征向量.

其次，我们来证明 $B=C$.

因 B 是实对称阵，故有正交阵 T 使 $T'BT$ 是对角阵. 因 $T^{-1}=$

T'，即矩阵 B 在实数域上相似于对角形矩阵. 它在实数域上应有 n 个线性无关的特征向量，设为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使

$$B\alpha_i=\mu_i\alpha_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

其中 μ_i 为 B 的特征根. 由上面讨论，对 C 而言，也有

$$C\alpha_i=\mu_i\alpha_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

令 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 P 是可逆阵，且有

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}=P^{-1}CP$$

于是 $B=C$.

正定矩阵是半正定阵的特殊情况，二者之间关系极为密切. 以上诸例从它们的线性组合式、行列式值的比较以及 m 次根等方面作了一些探讨，得到的相应的有关性质都是基本且有用的. 在证明的过程中，多数都用到了结论：实对称阵正交相似于主对角线由其特征根构成的对角矩阵，然后再从特征根全为正，或全为非负. 最后结合其他条件去导出所要证明的结论，这种证明的思路，值得借鉴.

三、正定矩阵与实矩阵

下面，我们介绍正定矩阵在实矩阵有关问题的讨论中的一些应用.

例 12 设 B 是 $m\times n$ 的实矩阵，$X'=(x_1,\cdots,x_n)$是实向量. 证明：齐次线性方程组 $BX=0$. 只有零解的充要条件是 $B'B$ 为正定矩阵.

证明 必要性 若 X_0 是任意非零实列向量，则

$$X_0'B'BX_0=(BX_0)'(BX_0)\geqslant 0$$

又 $(B'B)'=B'B$ 为实对称阵，故 $B'B$ 是半正定的. 如果能证明 $|B'B|\neq 0$，则有秩 $B'B=n$. 这时可知矩阵 $B'B$ 是正定矩阵. 下面就来证明 $|B'B|\neq 0$. 若不然 $|B'B|=0$，则齐次线性方程组 $B'BX=0$ 有

非零解，设为 X_0，于是 $(BX_0)'BX_0=X_0'B'BX_0=0$，从而 $BX_0=0$，与题设 $BX=0$，只有零解矛盾，于是 $|B'B|\neq 0$，故 $B'B$ 是正定矩阵.

充分性　因 $B'B$ 正定，故对任一非零实向量 X，都有 $(BX)'BX=X'B'BX>0$. 若 $BX=0$ 有非零解 X_0，则 $X_0'B'BX_0=0$. 显然是不可能的，故 $BX=0$ 只有零解.

例 13　设 A 是 n 阶正定阵，B 是 $n\times m$ 实矩阵，B 的秩为 m（即列满秩阵），证明 $B'AB$ 是正定矩阵.

证明　因 $(B'AB)'=B'A'B=B'AB$，故 $B'AB$ 是实对称矩阵. 其次任取非零实列向量 X，必有 $BX\neq 0$. 若不然，设有非零向量 X_0 使 $BX_0=0$，则 $B'BX_0=0$. 但秩 $B'B=$ 秩 $B=m$，即 $B'B$ 是可逆方阵. 由 $B'BX_0=0$，可推得 $X_0=0$ 与 X_0 的取法矛盾. 故 $BX\neq 0$，又因 A 是正定阵，故对任取的非零实列向量 X 必有

$$X'(B'AB)X=(BX)'A(BX)>0$$

综上所述，$B'AB$ 是正定阵.

以上两个例子，提供了利用实矩阵（可以是长方阵）来构作正定阵的方法，从而把两者联系起来. 在证明的过程中，我们也看到了齐次线性方程组有非零解的判别定理，在正定二次型的理论中的应用.

例 14　（实满秩矩阵的正交正定分解）设 A 是 n 阶实满秩矩阵，证明存在唯一的正交矩阵 Q 和正定矩阵 B，使

$$A=QB \tag{16}$$

证明　存在性　因 A 是满秩 n 阶方阵，故 $AX=0$ 只有零解，由例12知 $A'A$ 是正定矩阵. 根据例10. 存在正定矩阵 B 使 $A'A=B^2$.

令 $Q=AB^{-1}$，则 $A=QB$，B 是正定阵. 再证 Q 是正交阵，事实上

$$Q'Q=(AB^{-1})'AB^{-1}=(B^{-1})'A'AB^{-1}=(B^{-1})'B^2B^{-1}=E$$

唯一性　设有正定阵 B 和 B_1，正交阵 Q 和 Q_1，使 $A=QB=Q_1B_1$，我们只须证明 $B=B_1$.

设矩阵 $A'A, B$ 及 B_1 的特征根分别为：

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$$

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n > 0$$

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n > 0$$

先证 $\mu_i = \alpha_i (i=1,2,\cdots,n)$，即 B 与 B_1 有相同的特征根. 由于 Q 是正交阵，则

$$A'A = (QB)'QB = B'Q'QB = B'B = B^2$$

同理可得 $A'A = B_1^2$. 于是 $B^2 = A'A = B^2_1$. 从而

$$\mu_i^2 = \alpha_i^2, \qquad \mu_i = \alpha_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

现证　$B = B_1$.

B 和 B_1 都是实对称阵，故存在正交阵 T 和 T_1 分别使：

$$B = T' \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix} T = T'DT$$

$$B_1 = T_1' \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} T_1 = T_1'D_1T_1 = T_1'DT_1$$

其中 $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$， $D_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$

于是由 $B^2 = B_1^2$，可得 $T'D^2T = T_1'D_1^2T_1$. 令 $W = T_1T'$ 则

$$WD^2 = T_1T'D^2 = D^2T_1T' = D^2W$$

若矩阵 $W = (w_{ij})$，由上式可得

$$w_{ij}\mu_j^2 = \mu_i^2 w_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

当 $\mu_i \neq \mu_j$　时，有 $w_{ij} = 0$，$w_{ij}\mu_j = \mu_i w_{ij}$

当 $\mu_i = \mu_j$　时也有 $w_{ij}\mu_j = \mu_i w_{ij}$

于是　　$WD = DW$，$T_1T'D = WD = DW = DT_1T'$

即　　$B = T'DT = T_1'DT_1 = B_1$

利用此例的结论. 可建立实满秩方阵与对角阵之间的联系，见下例.

例 15 设 A 为 n 阶实满秩方阵，证明存在正交阵 Q_1,Q_2，使

$$Q_1AQ_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{17}$$

这里 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 是矩阵 $A'A$ 的一切特征根且每个 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

证明 由(16)式矩阵 $A=QB$，其中 Q 是正交阵，B 为正定阵. 对 B 来说，有正交阵 T，使

$$B=T'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}T$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 B 的特征根. 故每个 $\lambda_i>0$.

令 $Q_1^{-1}=QT'$，$Q_2^{-1}=T$. 因 Q,T 都是正交阵，则 $QT'(QT')'=QT'TQ'=QEQ'=E$，即 Q_1^{-1},Q_2^{-1}是正交阵，从而 Q_1,Q_2 也是正交阵，代入等式 $A=QB$ 有

$$A=QB=QT'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}T=Q_1^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}Q_2^{-1}$$

故(17)式成立.

$$\text{又}\quad A'A=B'Q'QB=B'B=B^2=T'\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix}T$$

因为相似矩阵有相同的特征根，所以 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 是矩阵 $A'A$ 的一切特征根.

这个例题给出的结论，实质上是实满秩方阵 A 在特定意义下的标准分解，(17)式中的对角阵，由正定矩阵 $A'A$ 所唯一确定. 此例的证明用到两个重要结论，它们是实满秩方阵的正交正定分解

和实对称阵正交相似于一个对角矩阵，特别是后者，我们已经在较多例题的证明中都引用过.关于一般的实矩阵，还有以下的奇异值分解.

例16 设 A 是 $m\times n$ 的实矩阵，A 的秩为 $r>0$，证明 A 有分解式

$$A=T_1\begin{bmatrix}A_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}T_2 \tag{18}$$

其中 T_1,T_2 分别为 m 阶，n 阶的正交阵，且矩阵

$$A_r=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_r\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为正实数.

一般称(18)式为矩阵 A 的**奇异值分解**，实数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 称为 A 的**奇异值**.

分析 前面的结论是属于实满秩方阵，或实对称矩阵的，本例中的 A 未必是方阵也未必是满秩方阵，但矩阵 $A'A$ 至少是一个秩为 r 的半正定矩阵，因此，首先考虑矩阵 $A'A$.

证明 因矩阵 $A'A$ 是半正定矩阵，且秩 $A'A=$ 秩 $A=r>0$. 故有正交矩阵 P，使

$$P'A'AP=\begin{pmatrix}\alpha_1^2 & & & & & \\ & \alpha_2^2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \alpha_r^2 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}A_r^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{19}$$

其中 $\alpha_i^2>0(i=1,2,\cdots,r)$. 它们是矩阵 $A'A$ 的一切非零的特征根.

令 n 阶正交阵 $P=(P_1\quad P_2)$，其中 P_1,P_2 分别是 $n\times r,n\times(n-r)$ 子块. 于是

$$A'A=P\begin{bmatrix}A_r^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P'=[P_1P_2]\begin{bmatrix}A_r^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1'\\ P_2'\end{bmatrix}=P_1A_r^2P_1'$$

故 $$A_r^2=P_1'A'AP_1 \tag{20}$$

由 P 是正交阵，尚可推出等式

$$P_1'P_1=E_r,P_2'P_2=E_{n-r},P_1'P_2=P_2'P_1=0 \tag{21}$$

令 $B_1'=A_r^{-1}P_1'A'$，结合(20)式，有

$$\left.\begin{aligned}&B_1'B_1=A_r^{-1}P_1'A'AP_1(A_r^{-1})'=A_r^{-1}A_r^2(A_r^{-1})'=E_r\\&P_1A_rB_1'+P_2P_2'A'=P_1A_r(A_r^{-1}P_1'A')+P_2P_2'A'\\&\qquad=(P_1P_1'+P_2P_2')A'=A'\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

但 P 是可逆方阵，秩 $P'A'=$ 秩 $A=r$，故线性方程组 $P'A'X=0$ 的基础解系中含有 $m-r$ 个解向量，将其单位化、正交化后，构成一个 $m\times(m-r)$ 的矩阵 B_2，

则 $$P'A'B_2=0,\quad B_2'B_2=E_{m-r} \tag{23}$$

$$P_1'A'B_2=0=P_2'A'B_2 \tag{24}$$

结合 B_1' 的构造可知

$$B_1'B_2=A_r^{-1}(P_1'A'B_2)=0,\quad B_2'B_1=0 \tag{25}$$

若令 $Q=(B_1,B_2)$，结合(22)，(23)，(25)知，Q 应是一个 m 阶的正交矩阵，再计算

$$P_2'A'B_1=P_2'A'(A_r^{-1}P_1'A')'=(P_2'A'AP_1)A_r^{-1}$$

由(19)式知 $P_2'A'AP=0$，故 $P_2'A'B_1=0$ (26)

最后由矩阵 P,Q 的正交性以及(22)(24)(25)和(26)诸式，可推出

$$\begin{aligned}P'A'Q&=\begin{bmatrix}P_1'\\ P_2'\end{bmatrix}(P_1A_rB_1'+P_2P_2'A')[B_1B_2]\\&=\begin{bmatrix}A_r & B_1'\\ P_2' & A'\end{bmatrix}[B_1B_2]=\begin{bmatrix}A_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{27}$$

故 $$Q'AP=\begin{bmatrix}A_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

取 $T_1=(Q')^{-1}=Q,T_2=P^{-1}$，即得结论.

习　题

1. 用满秩线性替换将下列二次型化成标准形，并求其秩 r 和符号差 s 及所用的线性替换 $X=CY$.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_4^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+2x_2x_3-4x_2x_4$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3+3x_3^2$;

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$.

2. 求正交线性替换(即直角坐标变换)，化简二次曲面方程

$$5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz+4yz-17=0$$

3. 证明实二次型的秩 r 与符号差 s 有相同的奇偶性，且 $-r\leqslant s\leqslant r$.

4. 设 A 是正定矩阵，B 为半正定矩阵. 证明：如果行列式 $|A+B|=|A|$ 则 $|B|=0$.

5. 证明 $f(x_1,\cdots,x_n)=n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2$ 是半正定二次型，且当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时，它的值为零.

6. 与正定矩阵合同的矩阵是正定矩阵，试证之.

7. 正定阵 A 的任何 k 阶主子式

$$\left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}\right|>0 \qquad (1\leqslant k\leqslant n)$$

8. 证明：n 阶单位矩阵 E 与 $-E$ 在实数域上不合同，而在复数域上合同.

9. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶正定阵，实向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ 是二次实变实值函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$$

的极值点，则 α 必是它的极小点，且 $\alpha=A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$

并求出 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的极小值.

10. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是不全为零的实数，$A=(a_{ij})$ 为 n 阶正定矩阵，$b_{ij}=a_ia_ja_{ij}$

$(i,j=1,2,\cdots,n)$. 证明 $B=(b_{ij})$是正定矩阵.

11. 设 A 是正定矩阵,B 为 n 阶实对称阵. 证明有 n 阶满秩阵 P. 使 $P'AP=E$,$P'BP$ 为对角阵,其对角线上元素是 $|\mu A-B|$的 n 个实根.

12. A 是 n 阶正定矩阵,证明存在上三角正线(即对角线上元素为正的上三角阵)矩阵 B,使 $B'AB=E$.

13. 若 A、B 都是 n 阶实对称阵. A 的特征根都小于 a,B 的特征根都小于 b. 证明 $A+B$ 的特征根都小于 $a+b$.

14. A 是 n 阶半正定阵,B 是 n 阶实矩阵. 若有自然数 i 使 $A^iB=BA^i$,证明 $AB=BA$.

15. 设 A 为 n 阶正定矩阵,证明对任意 n 阶实矩阵 B,有秩$(B'AB)=$秩 B.

16. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$ 的正惯性指数是 p,秩为 r. 证明 $p=r<n$.

17. $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 是满秩实二次型,它的正负惯性指数都大于或等于 1,或二次型经过满秩线性替换:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \\ x_2 = \quad\quad y_2 + \cdots + y_n \\ x_n = \quad\quad\quad\quad\quad\quad y_n \end{cases}$$

化成规范形 $y_1^2+\cdots-y_n^2$,试求三个非零向量 α、β 及 γ,使 $f(\alpha)>0$,$f(\beta)<0$ 及 $f(\gamma)=0$.

18. 证明实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}(\lambda+i+j)x_ix_j$ 的秩和符号差都与 λ 无关$(n\geqslant 2)$.

19. 设 b 是 n 阶对称阵 A 的最大特征根,证明 $bE-A$ 是半正定矩阵.

20. 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 的秩为 n,证明它可用正交线性替换化成规范形的充分必要条件是 A 为正交矩阵.

第七章　线性空间与欧氏空间

§1　线性空间

基本概念与结论

一、线性空间的定义及性质

1. 设 V 是一个非空集合，P 是一个数域. 在集合 V 中定义了一种代数运算，叫做**加法**，即对于 V 中任意两个元素 α 与 β，在 V 中都有唯一的一个元素 γ 与它们对应，称为 α 与 β 的**和**，记为 $\gamma=\alpha+\beta$. 在数域 P 与集合 V 之间定义了一种运算叫做**数量乘法**，即对于 P 中任一数 k 与 V 中任一元素 α，在 V 中都有唯一的一个元素 δ 与它们对应，称为 k 与 α 的**数量乘积**，记为 $\delta=k\alpha$. 如果上述两种运算满足以下条件：

加法满足下面四条规则：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3) 在 V 中有一个元素 0，对 $\forall\ \alpha\in V$ 都有

$$\alpha+0=\alpha$$

(具有这个性质的元素 0 称为 V 的**零元素**)；

(4) 对于 V 中每一个元素 α，都有 V 中的元素 β 使得

$$\alpha+\beta=0$$

(β 称为 α 的**负元素**).

数量乘法满足下面两条规则：

(5) $1\alpha=\alpha$；

(6)$k(l\alpha)=(kl)\alpha$.

数量乘法与加法满足：

(7)$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

(8)$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

其中 $k,l\in P,\alpha_1\beta_1\gamma\in V$，则称 V 是数域 P 上的**线性空间**.

数域 P 上的线性空间 V 又称为**向量空间**或**仿射空间**. 集合 V 中的元素通常称为**向量**，P 称为线性空间的**系数域**或**基域**.

2. 线性空间有如下简单的性质：

(1)零元素是唯一的.

(2)负元素是唯一的，α 的负元素记为-α.

(3)$0\alpha=0$；$k0=0$；$(-1)\alpha=-\alpha$.

(4)如果 $k\alpha=0$，则 $k=0$ 或 $\alpha=0$.

二、向量的线性组合、向量组的等价、线性相关与线性无关

将第三章中 n 元数组为元素的 n 维向量空间的有关概念推广到一般线性空间，就可建立相应的概念，并推导出完全平行的结论.

三、基、维数与坐标

1. 在线性空间 V 中，如果存在 n 个向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n$ 满足

(1)$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 线性无关；

(2)V 中任一向量 α 总可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示.

那么称 V 为 n 维(有限)**线性空间**，n 为 V 的**维数**，记为 $\dim V=n$，并称 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 为线性空间 V 的一个**基**(或一组基).

如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，那么就称 V 为**无限维的**.

2. 在 n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量构成 V 的一个基.

3. 在 n 维线性空间 V 中任一向量 α 可被基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 唯一地表示为

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

n 元有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的**坐标**.

四、基变换与坐标变换

1. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots$ ε'_n 是 V 的两个基，它们有如下关系：

$$\begin{cases} \varepsilon'_1=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n \\ \varepsilon'_2=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon'_n=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n \end{cases} \tag{1}$$

则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的**过渡矩阵**. (1)可以形式地表达为

$$(\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A \tag{2}$$

称为**基变换公式**.

2. 过渡矩阵 A 是可逆的，并且，如果 A 为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵，那么由基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的过渡矩阵是 A^{-1}，即

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n)A^{-1}$$

3. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 是 V 的两个基，且有基变换公式(2)又 V 中向量 α 在两个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 下的坐标分别是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$，那么在基变换公式(2)下，有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad 或 \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

称为**坐标变换公式**：

4. 设 V 是数域 P 上线性空间，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基.

$$\beta_1,\cdots,\beta_n\in V \text{ 且 } (\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$$

则$(\beta_1,\cdots,\beta_n)$为 V 之基的充要条件是 A 可逆.

应用举例

一、线性空间的判定

例 1 判断下列集合对指定运算是否构成给定数域上的线性空间.

(1)全体实数的二元序列的集合，$P=R$ 对于下面定义的运算：

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$$

$$k\circ(a_1,b_1)=(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2)$$

这里用$\oplus$表加法运算，$\circ$表数乘运算，$k\in R$.

(2)数域 P 上全体 n 阶对称矩阵与反对称矩阵所成的集合 V，对于矩阵的加法和数乘；

(3)全体正实数 R^+构成的集合，$P=R$. 加法和数乘定义为：

$a\oplus b=ab,\quad k\circ a=a^k\quad k\in R,\quad a,b\in R^+$

(4)平面上全体向量的集合，$P=R$. 对于向量的加法和如下定义的数乘

$$k\circ\alpha=\alpha$$

这里 $k\in R$.

(5)设数域 $P=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b \text{ 为有理数}\}$. V 是有理数集，对于普通数的加法和如下定义的数乘：

$$(a+b\sqrt{2})\circ\alpha=(a+b)\alpha\quad(a+b\sqrt{2}\in P,\alpha\in V)$$

解 (1)构成实数域 R 上的线性空间，令全体实二元数列作成的集合为 V，显然 V 非空. 且对于所定义的两种运算封闭，运算结果唯一确定，还可逐一验证 8 条运算规律成立. 我们选择几条为

例验证如下：

①V 中存在零元素：用待定法，令(x,y)为 V 的零元素，则

$$\forall\ (a,b)\in V,\text{有}(a,b)\oplus(x,y)=(a,b)$$

由加法定义 $(a+x,b+y+ax)=(a,b)$

解方程组 $\begin{cases}a+x=a\\ b+y+ax=b\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

下面验证$(0,0)$确是 V 中的零元素. 显然，$(0,0)\in V$，同时，$\forall\ (a,b)\in V$，$(a,b)\oplus(0,0)=(a+0,b+0+a\cdot 0)=(a,b)$. 故 V 中存在零元素$(0,0)$.

②$\forall\ (a,b)\in V$，(a,b)存在负元素. 我们仍用待定法. 令$(a,b)\oplus(x,y)=(0,0)$，由加法定义，有

$$(a+x,b+y+ax)=(0,0)$$

解方程组 $\begin{cases}a+x=0\\ b+y+ax=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-a\\ y=a^2-b\end{cases}$

仿①可验证$(-a,a^2-b)$是(a,b)的负元素.

③ $1\circ(a,b)=(1\cdot a,1\cdot b+\frac{1(1-1)}{2}a^2)=(a,b)$

④ $k\circ(l\circ(a,b))=k\circ(la,lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2)$

$$=(kla,k(lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2)+\frac{k(k-1)}{2}(la)^2)$$

$$=(klb,kla+\frac{kl(kl-1)}{2}a^2)$$

$$=(kl)\circ(a,b)$$

(2)设 A 是对称矩阵，B 是反对称矩阵，且都不是零矩阵，则

$$(A+B)'=A'+B'=A-B$$

但 $A-B\neq A+B$，$A-B\neq-(A+B)$ （否则 A,B 之一为零矩阵）. 即 $A+B$ 既不是对称阵，也不是反对称阵，故 $A+B\overline{\in} V$，因而 V 不是 P 上的线性空间.

(3)R^+关于运算“$\oplus$”及“$\circ$”构成实数域 R 上的线性空间，因

为对定义的二种运算是封闭的，运算结果也是唯一确定的，且加法满足交换律和结合律，并可自行验证，1 是零元素，每个正实数 a 的负元素是$\frac{1}{a}$，还有 $1\circ a=a^1=a$.

$$k\circ(l\circ a)=(a^l)^k=a^{kl}=(kl)\circ a$$

$$(k+l)\circ a=a^{k+l}=a^k\cdot a^l=k\circ a\oplus l\circ a$$

$$k\circ(a\oplus b)=(ab)^k=a^k\cdot b^k=k\circ a\oplus k\cdot b$$

若将题(3)中的加法定义改为普通数的加法，即 $a\oplus b=a+b$. 则 R^+ 关于$\oplus$，$\circ$ 不构成 R 上的线性空间.

(4)当 $k=l=1$ 时，$(1+1)\circ a=2\circ a=a$，但 $1\circ a+1\circ a=a+a=2a$，即

$$(k+l)\circ a\neq k\circ a+l\circ a$$

所以不构成实数域 R 上的线性空间.

(5)当 $k=l=\sqrt{2}\in P$，$a=1\in V$ 时，

$$(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})\circ 1=2\circ 1=2\cdot 1=2,$$

$$\sqrt{2}\circ(\sqrt{2}\circ 1)=\sqrt{2}\circ 1=1.$$

即 $(kl)\circ a\neq k\circ(l\circ a)$

所以 V 不是 P 上的线性空间.

例 2 已知数域 $P\subseteq$数域 $\overline{P}$，按通常数的运算，P 是否构成 $\overline{P}$ 上的线性空间？$\overline{P}$ 是否构成 P 上的线性空间？

解 P 不一定构成 $\overline{P}$ 上的线性空间.

例如，P 为有理数域，$\overline{P}$ 为实数域，对 $1\in P$，$\sqrt{2}\in\overline{P}$，但 $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}\overline{\in}P$，即有理数域不能构成实数域上的线性空间. 一般地，当 $P\subset\overline{P}$ 时，即存在数 $k\in\overline{P}$，但 $k\overline{\in}P$，有 $k\cdot 1=k\overline{\in}P$，所以 P 不能构成 $\overline{P}$ 上的线性空间.

但 $\overline{P}$ 构成 P 上的线性空间. 因为 $\overline{P}$ 中两数的和及 P 中数与 $\overline{P}$ 中数的乘积均唯一确定且必属于 $\overline{P}$，且加、乘运算满足线性空间定义的全部条件.

二、维数、基和坐标

确定线性空间是无限维还是有限维，以及在非零有限维时，确定它的基和维数是研究线性空间的基本问题. 一般情况下，根据基和维数的定义即可求得.

例 3 判定下列线性空间是无限维还是有限维的，并在非零有限维时，求它的一个基并指出其维数.

(1)数域 P 上非零多项式 $g(x)$ 的所有倍式构成的线性空间 V；

(2)数域 P 上全体形如 $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix}$ 的二阶方阵，对于矩阵加法和数乘所构成的线性空间 V；

(3) $V=\{X\in P^{n\times n}\mid \mathrm{Tr}X=0\}$ 对于矩阵的加法与数乘构成的 P 上线性空间，$\mathrm{Tr}X$ 是 n 阶方阵 X 的迹，即 X 的主对角线上全体元素之和；

(4)例 1 中(1)，(3)的空间.

解 (1)因为对任意自然数 n，在 V 中存在 n 个线性无关的向量 $g(x),xg(x),\cdots,x^{n-1}g(x)$. 所以 V 是无限维线性空间.

(2) $\forall \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix}\in V$，有

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即 V 中任一向量可由 V 中向量 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 线性表出，再令

$$k_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=0$$

必有 $k_1=k_2=0$，所以 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 线性无关. 由定义它们是 V 的一个基，且 $\dim V=2$.

(3)令 $X=(x_{ij})\in V$，则 $\sum_{i=1}^{n}x_{ii}=0$，作为 x_{ii} 的齐次线性方程组，

其解为：$x_{11}=a_{11}, x_{22}=a_{22}, \cdots, x_{n-1,n-1}=a_{n-1,n-1}, x_{nn}=-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{n-1,n-1}$，于是

$$V=\left\{A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & -a_{11}-\cdots-a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \middle| a_{ij}\in P\right\}$$

但
$$A=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_{ij}+\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -a_{11}-\cdots-a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_{ij}$$

$$+a_{11}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}+\cdots+a_{n-1,n-1}\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_{ij}+\sum_{i=1}^{n-1}a_{ii}(E_{ii}-E_{nn})$$

即 V 中任意向量可表成如下 n^2-1 个向量的线性组合：

$$E_{ij}(i\neq j).\qquad E_{ii}-E_{nn}\qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

又可证这 n^2-1 个向量线性无关. 故构成 V 的一个基，且 $\dim V=n^2-1$.

(4)易证例 1(1)中线性空间的一个基是(1,0)与(0,1)，故构成二维空间.

例 1(3)的线性空间 R^+ 中任一不等于 1 的正实数都是基，例如取 $b\in R^+, b\neq 1$，则 R^+ 中任一正实数 a，可经 b 线性表出：

$$a=b^{\log_b a}=(\log_b a)\circ b$$

又设 $k\circ b=0$，因零向量为 1，故有 $k\cdot b=b^k=1$. 于是 $k=0$，即 b 线性无关，所以 b 是 R^+ 的一个基，R^+ 是一维线性空间.

通过以上各例可见，在求向量空间的基时，把 V 中任意向量表成 V 中某有限个向量的线性组合(即找出 V 的生成元)是很关

键的，应予以重视.

例 4 (1)证明以下两向量组是空间 P^3 的两个基：

$\alpha_1=(1,2,1),\alpha_2=(2,3,3),\alpha_3=(3,7,1)$;

$\beta_1=(3,1,4),\beta_2=(5,2,1),\beta_3=(1,1,-6)$.

(2)求向量 α 在这两个基下坐标的关系.

(1)**证明** 以向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及 β_1,β_2,β_3 的分量为列所构成的三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及 β_1,β_2,β_3 都线性无关，从而都是 P^3 的基.

(2) **解法一** 用待定法直接解线性方程组导出坐标变换公式.

设向量 α 在两个基下的坐标分别为 (x_1,x_2,x_3) 及 (y_1,y_2,y_3)，即

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3$$

所以 $(x_1+2x_2+3x_3,\ 2x_1+3x_2+7x_3,\ x_1+3x_2+x_3)$

$$=(3y_1+5y_2+y_3,y_1+2y_2+y_3,\ 4y_1+y_2-6y_3)$$

于是

$$\begin{cases} 3y_1+5y_2+y_3=x_1+2x_2+3x_3 \\ y_1+2y_2+y_3=2x_1+3x_2+7x_3 \\ 4y_1+y_2-6y_3=x_1+3x_2+x_3 \end{cases}$$

是关于 y_1,y_2,y_3 的线性方程组，其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

从而求出方程组的唯一解：$\begin{cases} y_1 = 13x_1 + 19x_2 + \dfrac{181}{4}x_3 \\ y_2 = -9x_1 - 13x_2 - \dfrac{63}{2}x_3 \\ y_3 = 7x_1 + 10x_2 + \dfrac{99}{4}x_3 \end{cases}$

写成矩阵形式为 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \dfrac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\dfrac{63}{2} \\ 7 & 10 & \dfrac{99}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

即所给基变换下的坐标变换公式.

解法二 利用坐标变换公式.

设 α 在两个基下坐标分别为 (x_1, x_2, x_3) 及 (y_1, y_2, y_3).

$$\because \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为 3 维单位向量.

$$\therefore \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 13 & 19 & \dfrac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\dfrac{63}{2} \\ 7 & 10 & \dfrac{99}{4} \end{pmatrix}$$

即求出了基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵，所以 α 在两个基下坐标有如下关系：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 5 (1)证明下列多项式是 $P[x]_n$(即次数 $\leqslant n-1$ 的多项式及零多项式构成的线性空间)的基：

$$f_i(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)$$

$i=1,2,\cdots,n$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 P 中 n 个互不相同的数.

(2)在(1)中，取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为全体 n 次单位根，求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵.

证明 (1)要证明 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 n 维空间 $P[x]_n$ 的一个基，只要证明它们线性无关就行了. 假设

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)=0 \tag{3}$$

令 $x=a_1$，代入(3)式，由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相等，故 $f_1(a_1)\neq 0$，但 $f_2(a_1)=\cdots=f_n(a_1)=0$，从而有

$$k_1f_1(a_1)=0$$

故 $k_1=0$. 同理可证 $k_2=k_3=\cdots=k_n=0$.
从而知 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $P[x]_n$ 的一个基.

(2)由题意 $a_1=\omega_1,a_2=\omega_2,\cdots,a_n=\omega_n$，其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为全体 n 次单位根，由

$$\begin{aligned} x^n-1 &=(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_n) \\ &=(x-\omega_1)f_i(x) \quad i=1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

$$\therefore f_i(x)=\frac{x^n-1}{x-\omega_i}=\frac{x^n-\omega_i^n}{x-\omega_i}=\omega_i^{n-1}+\omega_i^{n-2}x+\cdots+\omega_ix^{n-2}+x^{n-1}$$

由此可得，基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵是

$$\begin{pmatrix} \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ \omega_1^{n-2} & \omega_2^{n-2} & \cdots & \omega_n^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

§2 线性子空间

基本概念与结论

一、子空间及其判别条件

1. 数域 P 上线性空间 V 的一个非空子集合 W 称为 V 的一个**线性子空间**(或简称子空间),如果 W 对于 V 的两种运算也构成线性空间.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是线性空间 V 中一组向量,这组向量所有的线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r(k_i\in P,i=1,2,\cdots,r)$构成的子空间,称为由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **生成的子空间**,记为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 称为它的一组**生成元**.

3. 由单个零向量组成的子集是线性空间的子空间,称为**零子空间**.线性空间 V 中,零子空间和线性空间本身称为 V 的**平凡子空间**,其它线性子空间称为**非平凡子空间**.

4. 若线性空间 V 的非空子集 W 对 V 的两种运算封闭,则 W 就是 V 的一个子空间.

5. 两个向量组生成相同子空间的充要条件是这两个向量组等价.

6. 设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 W 的一个基,那么这组向量必可扩充为整个空间的

基. 即 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$,使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基.

7. 如 $V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$,则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组为 V 的基,特别地线性空间的一组线性无关生成元构成它的基.

二、子空间的和与交

1. 设 V_1、V_2 是线性空间 V 的子空间,所谓 V_1 与 V_2 的和,是指子集 $\{\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_i\in V_i, i=1,2\}$,记为 V_1+V_2.

2. 如果 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间,则交 $V_1\cap V_2$ 与和 V_1+V_2 都是 V 的子空间.

3. (维数公式)如果 V_1,V_2 是有限维线性空间 V 的两个子空间,那么 $\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$

4. 由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 生成的子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩.

三、子空间的直和

1. 如果 V 的子空间 V_1,V_2 的和 V_1+V_2 中每个向量 α 的分解式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2(\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)$ 是唯一的,这个和就称为**直和**,记为 $V_1\dot{+}V_2$.

2. 设 V_1 与 V_2 是线性空间的子空间,则以下命题等价:

(1)$V_1+V_2=W$ 是直和;

(2)等式 $\alpha_1+\alpha_2=0(\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)$ 只有在 α_1,α_2 全为零向量时才成立,即零向量分解式唯一;

(3)$V_1\cap V_2=\{0\}$;

(4)$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(W)$.

3. 线性子空间的直和可以推广到多个子空间的情形.

设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的子空间,如果和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 中每个向量 α 的分解式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s(\alpha_i\in V_i,i=1,2,\cdots,s)$ 是唯一的,这个和就称为直和,记为 $V_1\dot{+}V_2\dot{+}\cdots\dot{+}V_s$.

若 $V_1,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的子空间,则以下条件等阶.

(1)$W=\sum_i V_i$ 是直和；

(2)零向量的表示法唯一；

(3)$V_i\cap\sum_{j\neq i}V_j=\{0\}$；

(4)$\dim(W)=\sum_i \dim(V_i)$.

四、线性空间的同构

1.设 V,V' 是数域 P 上的两个线性空间，如果 σ 是 V 到 V' 的一个双射(既单且满的映射，见第八章§1)，且有以下性质：

(1)$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$

(2)$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

其中 α、β 是 V 中任意向量，k 是 P 中任意数，则称 σ 为 V 到 V' 的**同构映射**. 若 V 到 V' 存在一个同构映射 σ，就称线性空间 V 与 V' 是**同构的**.

2.同构映射具有下列性质：

(1)$\sigma(0)=0,\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$

(2)同构映射保持向量间的线性关系，即

$\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)$

(3)V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关的充要条件是它们的象 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$线性相关.

(4)如果 V_1 是 V 的一个子空间，那么 V_1 在 σ 下的象集

$$\sigma(V_1)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V_1\}$$

是 $\sigma(V)$的子空间，且 V_1 与 $\sigma(V_1)$维数相同.

(5)同构映射的逆映射以及两个同构映射的乘积还是同构映射.

(6)数域 P 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们维数相同.

应用举例

一、子空间的判定、维数和基

例 1 在 n 维线性空间 P^n 中，满足下列各条件的全体向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的集合 V_1 能否构成 P^n 的子空间？是几维子空间？

(1) $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$；

(2) $x_1x_2\cdots x_n=0$；

(3) $x_{i+2}=x_{i+1}+x_i \quad (i=1,2,\cdots,n-2)$.

解 (1) V_1 构成 P^n 的子空间. 因为零向量 $0\in V_1$，所以 $V_1\neq\varnothing$. 又若 $\alpha,\beta\in V_1$，则 $\alpha+\beta,k\alpha$ 各分量的和也等于零，即 $\alpha+\beta,k\alpha\in V_1$. 故 V_1 是子空间. 由于 $x_n=-x_1-\cdots-x_{n-1}$，故 $(x_1,\cdots,x_n)=x_1(1,0,\cdots,-1)+\cdots+x_{n-1}(0,\cdots,1,-1)$ 故 $(1,0,\cdots,-1),\cdots,(0,0,\cdots,1,-1)$ 为 V_1 的生成元，又这组生成元线性无关，故为 V_1 的一个基. 所以 V_1 是 $n-1$ 维子空间.

(2) 当 $n=1$ 时，V_1 是零子空间. 当 $n>1$ 时，V_1 不构成子空间. 例如 $n=2$ 时，$(1,0),(0,1)\in V_1$，但它们的和 $(1,1)\overline{\in}V_1$.

(3) 由题意，V_1 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3 & =0 \\ \quad x_2+x_3-x_4 & =0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \qquad x_{n-2}+x_{n-1}-x_n & =0 \end{cases}$$

的解空间，显然它是 P^n 的一个子空间，又因为它的系数矩阵的秩为 $n-2$，所以 V_1 是 2 维子空间.

例 2 把复数域看作有理数域上的一个线性空间，试证任意数域恒为它的子空间. 若把复数域看作实数域上的线性空间，试问有理数域是否为子空间？

证明 因为任意数域 P(显然 $P\neq\varnothing$) 都是复数域的一个子集合. 又 $\forall\, a,b\in P$，均有 $a+b\in P$，又由于有理数域为最小数域，因此

对任意有理数 k，必有 $k\in P$，故 $ka\in P$. 所以把复数域看成有理数域上的线性空间时，任何数域 P 都是它的子空间.

但是，把复数域看成实数域上的线性空间时，对任意实数 k，它与有理数 a 的乘积不一定是有理数. 因而有理数域不是它的子空间.

例 3 设 C 为复数集，R 为实数集.

$$V=\left\{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\middle| a_{ij}\in C, a_{11}+a_{22}=0\right\}$$

$W=\left\{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\in V\middle| a_{21}=-\bar{a}_{12}\right\}$ 这里 $\bar{a}_{12}$ 是 a_{12} 的共轭复数.

(1)按通常矩阵的加法及数与矩阵的乘法，证明 V 作成 R 上的线性空间，试求 V 的一个基，并确定其维数.

(2)证明 W 是 V 的子空间，求出 W 的一个基，并确定其维数.

证明 (1)因为 C 上二阶方阵全体按通常矩阵加法及数乘构成 R 上的一个线性空间 $M_2(C)$，故只要证明 V 是 $M_2(C)$ 的一个子空间.

显然 $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in V$，即 V 不空. 任取 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\in V$，$k_1$，$k_2\in R$，易证

$$k_1\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\in V$$

即 V 是 $M_2(C)$ 的一个子空间，因而 V 也是 R 上的线性空间.

又 $\forall\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\in V$， 有 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & -a_{11}\end{bmatrix}$

令 $a_{11}=a_1+b_1i$， $a_{12}=a_2+b_2i$， $a_{21}=a_3+b_3i$ 其中 a_k， $b_k\in R$ $k=1,2,3$ 则

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$+b_1\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}+b_2\begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

即 V 中任一矩阵可由 V 中上述六个矩阵线性表出，因而这六个元素为 V 的一组生成元，且不难验证它们线性无关，故这六个矩阵是 V 的一个基，$\dim V=6$.

(2)与(1)类似的方法可证明 W 是 V 的一个子空间，且 W 中任一向量可记为

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & -a-bi \end{bmatrix} \quad a、b、c、d\in R$$

于是

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & -a-bi \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$
$$+c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

故 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ 是 W 的一组生成元，且它们线性无关，所以是 W 的一个基，从而 $\dim W=4$.

例 4 设 $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

且 $M=\{f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE \mid a_i\in$ 数域 $P\}$ 证明：M 关于通常矩阵的加法与数乘构成 P 上的线性空间，并求 M 的维数.

证明 显然 $0\in M$，故 M 是数域 P 上三阶方阵所成线性空间 $P^{3\times 3}$ 的一个非空子集，易证 M 是 $P^{3\times 3}$ 的一个子空间，从而 M 是 P 上的一个线性空间.

另一方面，A 的特征多项式为 $(x-1)^3$，A 的最小多项式为 $(x-1)^2$，任取 $f(x)\in P[x]$，则

$$f(x)=(x-1)^2q(x)+b_1x+b_0 \quad (b_1,b_0\in P)$$

于是 $f(A)=b_1A+b_0E$，可见 A,E 是 M 的生成元，

$$M=L(E,A)$$

并且 A,E 线性无关，所以 E,A 为线性空间 M 的一个基，从而 $\dim M=2$.

例 5 已知 $Q(\sqrt{2}-i)$ 是有理数域 Q 添加 $\sqrt{2}-i$ 所得的数域（即包含 Q 与 $\sqrt{2}-i$ 的最小数域），试求 $Q(\sqrt{2}-i)$ 作为 Q 上线性空间的维数及一个基.

解 $\because\quad \sqrt{2}-i\in Q(\sqrt{2}-i)$

$$\therefore\quad (\sqrt{2}-i)^{-1}=\frac{\sqrt{2}+i}{3}\in Q(\sqrt{2}-i)$$

从而推知 $\quad \sqrt{2},i\in Q(\sqrt{2}-i)$

令 $\quad W=\{a_1\cdot 1+a_2\cdot\sqrt{2}+a_3i+a_4\sqrt{2}i\mid a_k\in Q,k=1,2,3,4\}$

不难证明，W 是一个包含 Q 和 $\sqrt{2}-i$ 的数域，且为 Q 上的线性空间，即 $W\supseteq Q(\sqrt{2}-i)$.

又因为 $\sqrt{2},i\in Q(\sqrt{2}-i)$，所以 $W\subseteq Q(\sqrt{2}-i)$

因此 $$Q(\sqrt{2}-i)=W$$

由于 $1,\sqrt{2},i,\sqrt{2}i$ 是 W 的一组生成元，并且它们在理数域上线性无关，因此是数域 Q 上线性空间 $Q(\sqrt{2}-i)$ 的一个基，且 $\dim Q(\sqrt{2}-i)=4$.

例 6 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个基，A 是 P 上 $n\times s$ 矩阵，且 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$，证明：子空间 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的维数 $=$ 秩 A.

证法一 为了证明结论成立，只须决定 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的极大无关组中向量个数等于秩 A.

令 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

且秩 $A=r$，则 $r\leqslant\min(n,s)$，不失一般性，可设 A 的前 r 列是 A 的列向量组的极大线性无关组，由已知条件可得：

$$\beta_i=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\cdots+a_{ni}\alpha_n\ (i=1,2,\cdots,s) \qquad (4)$$

下证 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的一个极大线性无关组.

先设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=0$

由(4)得 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\cdots+a_{ir}k_r)\alpha_i=0$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1r}k_r=0\\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2r}k_r=0\\ \qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nr}k_r=0\end{cases}$$

该方程组系数矩阵的秩为 r，故只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

其次，用类似方法可证任意添加一个向量 $\beta_q(r<q\leqslant s)$ 后，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_q$ 线性相关.

故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的极大线性无关组，从而命题得证.

证法二 利用同构映射性质证明.

由题设 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$

且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维空间 V 的一个基. 故 $\beta_i(i=1,2,\cdots,s)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标就是 A 的第 i 列，记为 X_i，但在取定基下，让每个向量对应于其坐标的映射 σ 为 V 到 P^n 的同构映射，且在这个同构映射下，有

$$\sigma(\beta_i)=X_i \qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

由同构映射保持线性关系的性质，易证向量组的秩经同构映射保持不变，于是 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 的秩等于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩，即 $\dim L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=$ 秩 A.

例7 设V_1,V_2是数域P上线性空间V的两个非平凡子空间，证明：

(1)若$\alpha\in V_2,\beta\in V,\beta\overline{\in}V_2$,则对任意$k\in P$,都有$\beta+k\alpha\overline{\in}V_2$;

(2)若$\alpha\overline{\in}V_1,\beta\in V$,则最多有一个$k\in P$使$\beta+k\alpha\in V_1$;

(3)设$V_1,V_2,\cdots,V_s$是线性空间V的s个非平凡的子空间，则V中至少有一个向量不属于$V_1,V_2,\cdots,V_s$中任何一个.

证明 (1)因为$\alpha\in V_2$,所以$k\alpha\in V_2$,如果$\beta+k\alpha\in V_2$,那么$\beta=(\beta+k\alpha)-k\alpha\in V_2$. 矛盾. 故$\beta+k\alpha\overline{\in}V_2$.

(2)如果$\beta+k_1\alpha,\beta+k_2\alpha\in V_1$,那么$(\beta+k_1\alpha)-(\beta+k_2\alpha)\in V_1$,即$(k_1-k_2)\alpha\in V_1$,若$k_1-k_2\neq 0$则有$\alpha\in V_1$. 这与假设矛盾. 故$h_1=k_2$,也就是说最多有一个$k\in P$使$\beta+k\alpha\in V_1$.

(3)对s作数学归纳法.

当$s=2$时，因为V_1是非平凡子空间，故存在$\alpha\overline{\in}V_1$. 如果$\alpha\overline{\in}V_2$,则α就是所求的向量. 如果$\alpha\in V_2$,又因V_2是非平凡子空间，故存在$\beta\overline{\in}V_2$. 如果$\beta\overline{\in}V_1$,则β就是所求的向量. 如果$\beta\in V_1$,此时$\alpha+\beta\overline{\in}V_1,\alpha+\beta\overline{\in}V_2,\alpha+\beta$就是所求的向量.

假设$s=m$时，结论成立. 令$V_1,V_2,\cdots,V_{m+1}$是V的非平凡的子空间. 由归纳假设，有$\alpha_1\in V$,但$\alpha_1\overline{\in}V_j(j=1,2,\cdots,m)$. 如果$\alpha_1\overline{\in}V_{m+1}$则$\alpha_1$就是所求的向量. 如果$\alpha_1\in V_{m+1}$,则存在$\alpha_2\overline{\in}V_{m+1}$,由(1)知对任意$k\in P$,都有$\alpha_2+k\alpha_1\overline{\in}V_{m+1}$. 而$\alpha_1\overline{\in}V_j(j=1,2,\cdots,m)$,又由(2)知对每个$V_j$,至多有一个$k_j\in P$,使$\alpha_2+k_j\alpha_1\in V_j$. 同此，除$k_1,k_2,\cdots,k_m$外,$\forall\ k\in P$,都有$\alpha_2+k\alpha_1\overline{\in}V_j(j=1,\cdots,m)$. 另外$\alpha_2+k\alpha_1\overline{\in}V_{m+1}$. 故$\alpha_2+k\alpha_1$就是所求的向量. 由数学归纳法原理，故命题得证.

二、两个子空间的交与和的维数

例8 已知$\alpha_1=(3,-1,2,1),\alpha_2=(0,1,0,2)$

$$\beta_1=(1,0,1,3),\beta_2=(2,-3,1,-6)$$

求由向量α_1,α_2生成的P^4的子空间$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$与向量β_1,β_2生

成的子空间 $V_2=L(\beta_1,\beta_2)$的交与和空间的维数和一个基.

分析 因为 $V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$，求出 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的极大无关组，就是 V_1+V_2 的一个基，再由和与交的维数公式，求出 $V_1\cap V_2$ 的维数，并由交空间定义求它的一个基. 本题也可先求 $V_1\cap V_2$ 的维数与基，再求 V_1+V_2 的维数与基.

解法一 $\because V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$

对以 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 为列的矩阵施行行的初等变换：

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1&2\\-1&1&0&-3\\2&0&1&1\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&1&0&-3\\0&0&-1&1\\0&1&1&-3\end{pmatrix}=B$$

秩 $A=$秩 $B=3$，$\therefore V_1+V_2$ 的维数是 3，且 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 为极大线性无关组，故它们是 V_1+V_2 的一个基.

又由 α_1,α_2 线性无关知，V_1 的维数是 2，同理，V_2 的维数也是 2，由维数公式知 $V_1\cap V_2$ 的维数是$(2+2)-3=1$.

从矩阵 B 易知 $\beta_1+\beta_2=\alpha_1-2\alpha_2$，故 $\beta_1+\beta_2=(3,-3,2,-3)$是 V_1,V_2 公有的非零向量，所以它是交空间 $V_1\cap V_2$ 的一个基.

解法二 令 $\gamma\in V_1\cap V_2$，则 $\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=t_1\beta_1+t_2\beta_2$.

即
$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-t_1\beta_1-t_2\beta_2=0$$

$$\therefore\quad\begin{cases}3k_1-t_1-2t_2=0\\-k_1+k_2+3t_2=0\\2k_1-t_1-t_2=0\\k_1+2k_2-3t_1+6t_2=0\end{cases}$$

k_1,k_2,t_1,t_2 是方程组(5)的解.

令 $\qquad\gamma\longmapsto(k_1,k_2,t_1,t_2)$

可以验证这个对应是交空间 $V_1\cap V_2$ 与(5)的解空间的一个同构对应.

解方程组(5)，求得基础解系为$(1,-2,1,1)$. 因此，$V_1\cap V_2$ 的

维数是 1，$\gamma=\alpha_1-2\alpha_2=(3,-3,2,-3)$是它的一个基. 又由维数公式可求出 V_1+V_2 的维数是 3，再由 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 线性无关，它们是和空间 V_1+V_2 的一个基.

注意 用此法求交空间的基时，$V_i(i=1,2)$的生成元必须是线性无关的.

例 9 设 V_1 及 V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间，且 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2)+1$. 求证 $V_1\subseteq V_2$ 或 $V_2\subseteq V_1$.

证法一 设 $\dim V_i=n_i(i=1,2)$，$\dim(V_1\cap V_2)=r$. 因此 $\dim(V_1+V_2)=r+1$. 于是得

$$r\leqslant n_i\leqslant r+1\quad(i=1,2)$$

(1)当 $n_1=n_2=r$ 时，

由于 $V_1\cap V_2\subseteq V_1$，$V_1\cap V_2\subseteq V_2$，且 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_i(i=1,2)$，

故 $V_1=V_2=V_1\cap V_2$ 结论成立；

(2)当 $n_1=n_2=r+1$ 时，

由于 $V_1\subseteq V_1+V_2$，$V_2\subseteq V_1+V_2$，且 $\dim V_i=\dim(V_1+V_2)=r+1$ $(i=1,2)$，故 $V_1=V_2=V_1+V_2$ 结论成立；

(3)当 $n_1=r,n_2=r+1$ 时，则 $V_1=V_1\cap V_2\subset V_2$；

当 $n_2=r,n_1=r+1$ 时，则 $V_2=V_1\cap V_2\subset V_1$.

综上所述，总有 $V_1\subseteq V_2$ 或 $V_2\subseteq V_1$ 成立.

证法二 用基扩充的方法证明.

当 $V_1\cap V_2=\{0\}$时，由 $\dim(V_1+V_2)=1$，易知结论显然真.

当 $\dim(V_1\cap V_2)=r>0$ 时，设 $V_1\cap V_2$ 的基为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，将它分别扩充为 V_1,V_2 的基，则 V_1 的基是

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-r}$$

V_2 的基是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-r}$

其中 n_1 是 V_1 的维数，n_2 为 V_2 的维数.

由维数公式的证明知，V_1+V_2 的基是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-r}\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-r}$. 又由假设 维$(V_1+V_2)=$维$(V_1+V_2)+1=r+1$. 所以

V_1+V_2 的基中除 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 外,仅还有一个向量,如果这个向量为 β_i,则 $V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$,$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_i)$ 可见 $V_2\subseteq V_1$.

同样,如果这个向量是 γ_i,则可推知 $V_1\subseteq V_2$.

三、子空间的直和

例 10 设 A 是 n 阶非退化矩阵,任意将 A 分为两个子块 $A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}$,证明:$n$ 维线性空间 P^n 是齐次线性方程组 $A_1X=0$ 与 $A_2X=0$ 各自的解子空间 V_1 与 V_2 的直和.

证明 因为 A 是非退化的,所以齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间 V 只含有零向量,设齐次线性方程组 $A_1X=0$ 与 $A_2X=0$ 的解子空间分别为 V_1 和 V_2,则有 $V=V_1\cap V_2$.

事实上,由 $V=\{0\}$ 有 $V\subseteq V_1\cap V_2$,反之,令 $\alpha\in V_1\cap V_2$,则 $A_1\alpha=0$ 且 $A_2\alpha=0$,于是有

$$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}\alpha=0$$

即 $A\alpha=0$,从而 $\alpha\in V$,所以 $V_1\cap V_2=V=\{0\}$.

再证 $P^n=V_1+V_2$.

设 A_1 的秩为 r,因为 A 是非退化的,所以 A_2 的秩为 $n-r$,且 r 与 $n-r$ 均 $\geqslant 1$,因而 V_1 与 V_2 的维数分别是 $n-r$ 与 r. 在 V_1 与 V_2 中各取一个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-r}$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$,现证明 n 个向量 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-r},\eta_1,\cdots,\eta_r$ 线性无关. 为此设

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_{n-r}\varepsilon_{n-r}+l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_r\eta_r=0$$

令 $\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_{n-r}\varepsilon_{n-r}$,则 $\alpha\in V_1$.

$\beta=-l_1\eta_1-l_2\eta_2-\cdots-l_r\eta_r$,则 $\beta\in V_2$.

且 $\alpha=\beta$,由于 $V_1\cap V_2=\{0\}$,所以 $\alpha=\beta=0$.

即 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=l_1=l_2=\cdots=l_r=0$

因此 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-r},\eta_1,\cdots,\eta_r$ 线性无关,从而是空间 P^n 的一个基.

$\forall\ \alpha\in P^n$ 有

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n-r}a_i\varepsilon_i+\sum_{j=1}^{r}b_j\eta_j\in V_1+V_2$$

所以 $P^n=V_1+V_2$ 且这个和是直和.

例 11 设 V 是数域 P 上线性空间,$V_1,V_2,\cdots,V_s(s\geqslant 4)$是 V 的子空间,且满足

$$V_i\cap(V_j+V_k)=\{0\}\qquad(i\neq j,k)$$

问和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是否一定是直和?

解 不一定. 例如,R为实数域,$V=\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_i\in R\}$,令 $V_1=L((1,0,0))$,$V_2=L((0,1,0))$,$V_3=L((0,0,1))$,$V_4=L((-1,-1,-1))$. 易证

$$V_i\cap(V_j+V_k)=\{0\}\qquad(i\neq j,k)$$

但 $(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)+(-1,-1,-1)=(0,0,0)$可见零向量分解式不唯一. 所以 $V_1+V_2+V_3+V_4$ 不是直和.

四、线性空间的同构

例 12 设 $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$,证明:由实数域上矩阵 A 的全体实系数多项式 $f(A)$组成的空间 $V=\left\{f(A)\mid A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$与复数域 C 作为实数域 R 上的线性空间 $V'=\{a+bi\mid a,b\in R\}$同构.

证法一 利用空间的维数相等必同构.

容易计算 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=\lambda^2+1$. 对任意实系数多项式$f(\lambda)$,有$f(\lambda)=(\lambda^2+1)q(x)+(a\lambda+b)$,$a,b\in R$. 则$f(A)=(A^2+E)q(A)+(aA+bE)$. 但 $A^2+E=0$ 所以 $f(A)=aA+bE$. 可见,A,E 是 V 的生成元,易证它们线性无关. 所以 A,E 是 V 的一个基. $\dim V=2$.

另一方面,易证 V'的一个基是 $1,i$,且 $\dim V'=2$. 由 V_1,V_2 维数相等,所以它们同构.

证法二 利用同构映射.

V 中任一多项式可记为 $f(A)=aE+bA(a,b\in R)$. 建立 V'到 V

的如下映射.

$$\sigma: \alpha_1 = a_1 + b_1 i \longrightarrow f_1(A) = a_1 E + b_1 A \quad (a_1, b_1 \in R)$$

易证 σ 是 V' 到 V 上的一一映射.

再设 $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$, $a_2, b_2 \in R$, $k \in R$

则有 $\sigma(\alpha_1 + \alpha_2) = \sigma((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i) = (a_1 + a_2) E + (b_1 + b_2) A = \sigma(\alpha_1) + \sigma(\alpha_2)$,

$$\sigma(k\alpha_1) = \sigma(ka_1 + kb_1 i) = ka_1 E + kb_1 A = k\sigma(\alpha_1),$$

故 σ 是 V' 到 V 的同构映射,所以 V 与 V' 同构.

例 13 设 V_1 为数域 P 上全体 $n+1$ 阶对称方阵所构成的线性空间,而 V_2 是 P 上三个变量的全体 n 次齐式所构成的线性空间,证明 V_1 与 V_2 同构.

证明 证 V_1 与 V_2 的维数相等.

令 $$F_{ij} = \begin{cases} E_{ij} + E_{ji} & (i \neq j) \\ E_{ij} & (i = j) \end{cases} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n+1$$

则这 $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个矩阵构成 V_1 的一个基, $\dim V_1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

另一方面,任意一个关于三个变量 x_1, x_2, x_3 的 n 次齐式 $f(x_1, x_2, x_3)$均可表示为

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k_1 + k_2 + k_3 = n} a_{k_1 k_2 k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$$

所以 $x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, x_3^{k_3}$ $(0 \leqslant k_i \leqslant n, i = 1, 2, 3$ 且 $k_1 + k_2 + k_3 = n)$ 构成 V_2 的一个基,基向量的个数等于从 3 个元素 x_1, x_2, x_3 中每次取出 n 个元素的可重复组合数

$$C_{n+3-1}^n = C_{n+2}^n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

由 V_1, V_2 维数相同,因而它们同构.

§3 欧氏空间

基本概念与结论

一、内积与欧氏空间

1. 设 V 是实数域 R 上的线性空间，在 V 上定义一个二元实函数，称为**内积**，记为(α,β)，它具有以下性质：

(1)$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；

(2)$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$，$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；

(3)$(\alpha,\alpha)\geqslant 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时，$(\alpha,\alpha)=0$.

这里 α,β,γ 是 V 中的任意向量，k 是任意实数. 这样的线性空间 V 称为**欧几里得空间**，简称**欧氏空间**.

2. 设 V 是数域 P 上线性空间，如果 V 中任意两个向量 α,β 都按某一法则对应于 P 内唯一确定的数，记为 $f(\alpha,\beta)$，且

(1)$\forall\ k_1,k_2\in P$，$\alpha_1,\alpha_2,\beta\in V$

有 $\quad f(k_1\alpha_2+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$

(2)$\forall\ l_1,l_2\in P$，$\alpha,\beta_1,\beta_2\in V$

有 $\quad f(\alpha,l_1\beta_1+l_2\beta_2)=l_1f(\alpha,\beta_1)+l_2f(\alpha,\beta_2)$

则称 $f(\alpha,\beta)$是 V 上一个**双线性函数**.

3. 内积是双线性函数.

4. 设 V 是 n 维欧氏空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，为 V 的一个基，α，$\beta\in V$，若

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,$$
$$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n.$$

则 $$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j$$

5. 令 $a_{ij}=(\varepsilon_1,\varepsilon_j)\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$

称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的**度量矩阵**.

6. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的一个基,A 是基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵,则 $\forall\ \alpha,\beta\in V$,有

$$(\alpha,\beta)=X'AY$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 为 α 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标列,$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$ 的 β 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标列.

7. 度量矩阵必为正定矩阵,且不同基的度量矩阵是合同的.(证明见例 5)

二、长度及夹角

1. 设 V 为欧氏空间,$\alpha\in V$,称非负实数 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 为向量 α **的长度**,记为 $|\alpha|$.

2. 当 $\alpha\neq 0$ 时,用 α 的长度 $|\alpha|$ 的倒数乘 α 得到单位向量 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 的过程叫做**把 α 单位化**.

3. 欧氏空间中有下述重要不等式:

(1)Cauchy-Буняковский 不等式

对任意向量 α,β,有

$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$ (或 $(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$)当且仅当 α,β 线性相关时,等号成立.

(2)三角不等式.

对任意向量 α,β,有

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

当 $(\alpha,\beta)=0$ 时,有 $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$. 称为**欧氏空间中的勾股定理**. 它可以推广到多个向量的情形.

4. 当 α,β 为非零向量时,称 $\cos^{-1}\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$ 为 α,β **的夹角**,记为 $\langle\alpha,\beta\rangle$. $0\leqslant\langle\alpha,\beta\rangle\leqslant\pi$.

三、标准正交基及性质

1. 在欧氏空间 V 中,如果 $(\alpha,\beta)=0$,那么称 α 与 β **正交或互相**

垂直.

2.V 中一组非零向量如果两两正交,则称为**正交向量组**,单个非零向量所成向量组也称为**正交的**.正交向量组必定线性无关.

3.n 维欧氏空间中,由 n 个向量组成的正交向量组称为**正交基**;由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**.

4.关于标准正交基,有下述重要结论:

(1)n 维欧氏空间的标准正交基总是存在的,但它并不唯一.

(2)一个标准正交基到另一个标准正交基的过渡矩阵 A 一定是正交矩阵,反之,如果第一个基是标准正交的,同时过渡矩阵是正交矩阵,那么第二个基也是标准正交的.

(3)n 维欧氏空间中一个基为标准正交基的充要条件是它的度量矩阵为单位矩阵.

(4)在标准正交基下,任一向量 α 的坐标都可以通过内积表示为:

$$\alpha=(\varepsilon_1,\alpha)\varepsilon_1+(\varepsilon_2,\alpha)\varepsilon_2+\cdots+(\varepsilon_n,\alpha)\varepsilon_n$$

它的逆命题也成立.

(5)设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基,$\alpha,\beta\in V$,若

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n$$

则 $$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

5.施密特(Schmidt)正交化方法　对于 n 维欧氏空间中任意线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 都可求出单位正交向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 使 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i)$,$i=1,2,\cdots,r$.

求 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 的方法是:

先把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 正交化,

令 $$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\beta_k=\alpha_k-\frac{(\alpha_k,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_k,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_k,\beta_{k-1})}{(\beta_{k-1},\beta_{k-1})}\beta_{k-1}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

再把 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 单位化,即令 $\eta_i=\frac{\beta_i}{|\beta_i|}(i=1,2,\cdots,r)$. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基,用施密特正交化方法就可得到 V 的一个标准正交基.

四、格拉姆(Gram)矩阵

1. n 维欧氏空间中任意 $k(k\leqslant n)$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的内积所组成的矩阵

$$\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_k)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_k)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\alpha_k,\alpha_1) & (\alpha_k,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_k,\alpha_k)\end{pmatrix}$$

称为 k 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的**格拉姆矩阵**,对应的行列式 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=|\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)|$ 称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的**格拉姆行列式**,其中 (α_i,α_j) 是 α_i,α_j 的内积.

当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维欧氏空间的一个基时,它对应的格拉姆矩阵就是基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵.

2. 关于格拉姆矩阵及行列式,有如下结论:

(1)设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 是 n 维向量,

则 $$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}^2$$

(2)n 维欧氏空间中任意 $k(k\leqslant n)$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 所组成的格拉姆行列式不等于零的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关；并当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关时，$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)>0$.

应用举例

一、内积与欧氏空间的判定

例 1 欧氏空间 V 中向量 x,y 的内积记为 (x,y)，设 σ 是 V 的线性变换（定义见第八章 § 1）. 若规定二元函数 $f(x,y)=(\sigma(x),\sigma(y))$，问这样规定的二元函数是否满足内积的条件？

解 设 α,β,γ 是 V 中任意向量，k 是任意实数，则

$f(\alpha,\beta)=(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\sigma(\beta),\sigma(\alpha))=f(\beta,\alpha)$

$f(k\alpha,\beta)=(\sigma(k\alpha),\sigma(\beta))=k(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=kf(\alpha,\beta)$

$f(\alpha+\beta,\gamma)=(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\gamma))=(\sigma(\alpha),\sigma(\gamma))+(\sigma(\beta),\sigma(\gamma))$
$=f(\alpha,\gamma)+f(\beta,\gamma)$

$f(\alpha,\alpha)=(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))\geqslant 0$

但 σ 不是单射时，存在 $\alpha\in V$ 且 $\alpha\neq 0$，使 $\sigma(\alpha)=0$，这时 $f(\alpha,\alpha)=(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=0$，因而 σ 不是单射时，所定义的二元函数不满足内积条件.

当 σ 为单射时，$f(\alpha,\alpha)=0$ 仅当 $\alpha=0$ 成立，它所定义的二元函数满足内积的全部条件.

例 2 $R^{n\times n}$ 为实 n 阶方阵全体所成的实线性空间，定义 $R^{n\times n}$ 上的二元函数 (A,B)：

$$(A,B)=\mathrm{Tr}(AB')$$

(1)证明 (A,B) 满足内积的条件，因此 $R^{n\times n}$ 在此定义下成一欧氏空间；

(2)求这个欧氏空间的一个标准正交基.

(1)**证明** $\forall\ A,B\in R^{n\times n},k\in R$ 有

$(A,B)=\mathrm{Tr}(AB')=\mathrm{Tr}[(AB')']=\mathrm{Tr}(BA')=(B,A)$

$$(kA,B)=\mathrm{Tr}(kAB')=k\mathrm{Tr}(AB')=k(A,B)$$

$$(A+B,C)=\mathrm{Tr}[(A+B)C']=\mathrm{Tr}(AC'+BC')$$
$$=\mathrm{Tr}(AC')+\mathrm{Tr}(BC')=(A,C)+(B,C)$$

其次，令 $A=(a_{ij})$，则

$(A,A)=\mathrm{Tr}(AA')=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\geqslant 0$，且仅当 $A=0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2=0$，即 $(A,A)=0$.

所以 (A,B) 满足内积条件，从而 $R^{n\times n}$ 在此定义下是一欧氏空间.

(2)**解**　由于

$$E_{ij}\cdot E_{kl}=\begin{cases}0 & j\neq k\\ E_{il} & j=k\end{cases}$$

所以　$(E_{ij},E_{kl})=\mathrm{Tr}(E_{ij}\cdot E_{lk})=\begin{cases}1 & l=j,k=i\\ 0 & l\neq j \text{ 或 } k\neq i\end{cases}$

可见 n^2 个非零矩阵 $E_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 $R^{n\times n}$ 的一个标准正交组，因而是 n^2 维欧氏空间 $R^{n\times n}$ 的一个标准正交基.

例 3　判断下列线性空间对规定的内积是否构成欧氏空间：

(1)R^2 是由实数域上全体二维向量所构成的线性空间，对 R^2 中任意向量 $\alpha=(a_1,a_2)$，$\beta=(b_1,b_2)$，规定

$$(\alpha,\beta)=(a_1+a_2)b_1+a_2b_2$$

(2)设 V 为普通平面上原点出发引出的全体向量所构成的二维线性空间，规定

$$(\alpha,\beta)=\begin{cases}0 & (\text{当 }\alpha,\beta\text{ 中有零向量，或夹角}\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{\pi}{2})\\ |\alpha||\beta| & (\text{当 }0\leqslant\langle\alpha,\beta\rangle<\frac{\pi}{2})\\ -|\alpha||\beta| & (\text{当}\frac{\pi}{2}<\langle\alpha,\beta\rangle\leqslant\pi)\end{cases}$$

(3)设 R^2 为二维实向量空间，$\alpha=(a_1,a_2)$，$\beta=(b_1,b_2)\in R^2$，规

定 $$(\alpha,\beta)=(a_1+a_2)(b_1+b_2)$$

解 (1)它满足内积条件(2),(3),但不满足(1),例如,取 $\alpha=(1,0)$, $\beta=(1,1)$

则 $$(\alpha,\beta)=(1+0)\cdot 1+0=1,(\beta,\alpha)=(1+1)\cdot 1+0=2$$

即 $$(\alpha,\beta)\neq(\beta,\alpha)$$

(2)它满足内积条件(1),(3),但不满足(2).例如,取 α,β,γ 都不是零向量,且 $|\alpha|\neq|\beta|$, $\alpha+\beta$ 与 γ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, α 与 γ 夹角小于 $\frac{\pi}{2}$,则 β 与 γ 的夹角必大于 $\frac{\pi}{2}$,从而有

$$(\alpha+\beta,\gamma)=0,(\alpha,\gamma)=|\alpha||\gamma|,(\beta,\gamma)=-|\beta||\gamma|$$

这时 $$(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)=(|\alpha|-|\beta|)|\gamma|\neq 0$$

即 $$(\alpha+\beta,\gamma)\neq(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$$

(3)它满足内积条件(1),(2),但不满足(3),例如,取 $\alpha=(1,-1)$,则

$$(\alpha,\alpha)=0,\text{但 }\alpha\neq 0$$

由于例中各线性空间定义的二元函数并不都合于内积条件,所以对规定的内积都不构成欧氏空间.

例 4 设 α 是欧氏空间 V 的一个非零向量, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V$,满足以下条件:

(1) $(\alpha_i,\alpha)>0,\quad i=1,2,\cdots,n;$

(2) $(\alpha_i,\alpha_j)\leqslant 0,\quad i,j=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq j$.

证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

证明 只须证当 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$ 时, k_i 全为0.为此先将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 适当编号,使

$$k_1,k_2,\cdots,k_r\geqslant 0;\quad k_{r+1},\cdots,k_n\leqslant 0\quad(1\leqslant r\leqslant n)$$

令 $$\beta=\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i=-\sum_{j=r+1}^{n}k_j\alpha_j$$

则 $(\beta,\beta)=(\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i-\sum_{j=r+1}^{n}k_j\alpha_j)=-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}k_ik_j(\alpha_i,\alpha_j)\leqslant 0$

又由内积性质 $(\beta,\beta)\geqslant 0$

故 $(\beta,\beta)=0$, 从而 $\beta=0$,即

$$\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i=0,\quad \sum_{j=r+1}^{n}k_i\alpha_j=0$$

于是
$$(\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i,\alpha)=\sum_{i=1}^{r}k_i(\alpha_i,\alpha)=0 \tag{6}$$

$$(\sum_{j=r+1}^{n}k_j\alpha_j,\alpha)=\sum_{j=r+1}^{n}k_j(\alpha_j,\alpha)=0 \tag{7}$$

由题设条件,$1\leqslant i\leqslant r,r+1\leqslant j\leqslant n$ 时,$k_i(\alpha_i,\alpha)\geqslant 0,k_j(\alpha_i,\alpha)\leqslant 0$ 故从(6),(7)知,$k_i(\alpha_i,\alpha)=0,k_j(\alpha_j,\alpha)=0$,从而有 $k_i=k_j=0,(i=1,2,\cdots,r,\quad j=r+1,\cdots,n)$.

因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

二、标准正交基

例 5 证明:(1)欧氏空间 V 中不同基的度量矩阵是合同的;(2)利用上述结果证明:非零有限维欧氏空间都有标准正交基.

证明 (1)证法一

设由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 $C=(c_{ij})$,C 为非退化的,且两个基的度量矩阵分别为 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$,其中 $a_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j),b_{ij}=(\beta_i,\beta_j)$.

因为
$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$$

则 $b_{ij}=(\beta_i,\beta_j)=(\sum_{l=1}^{n}c_{lj}\alpha_l,\sum_{k=1}^{n}c_{kj}\alpha_k)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{lj}\,c_{kj}\,a_{lk}$

而 $C'AC$ 的第 i 行第 j 列元素也正好是$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{lj}\,c_{kj}\,a_{lk}$,即 $B=C'AC$.由于 C 非退化,故 A,B 合同.

(把内积用度量矩阵表示出来,也是一种常用的方法.)

证法二 设方阵 A,B,C 意义同前,令 α,β 为 V 中任意两个向

量，且在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标分别是：

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',\quad Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$$

它们在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标分别是 CX 和 CY，于是在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下，有

$$(\alpha,\beta)=(CX)'A(CY)=X'(C'AC)Y.$$

另一方面，在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下有

$$(\alpha,\beta)=X'BY$$

因此

$$X'(C'AC)Y=X'BY$$

由于 α,β 的任意性，取 $\alpha=\beta$ 有 $X=Y$，得二次型

$$X'(C'AC)X=X'BX$$

于是 $C'AC=B$，即度量矩阵 A,B 合同.

(2)在欧氏空间 V 中任取一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，它的度量矩阵

$$A=(a_{ij})\quad 其中\ a_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$$

根据内积性质，对任意非零向量 α，它的坐标 $X\neq(0,0,\cdots,0)'$ 有

$$(\alpha,\alpha)=X'AX>0$$

因而 A 是正定的，从而存在实非退化方阵 C，使

$$C'AC=E$$

令

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也是欧氏空间 V 的一个基. 从(1)的证明知，它的度量矩阵就是 E，这说明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的一个标准正交基，即有限维欧氏空间总存在标准正交基.

关于欧氏空间中标准正交基的求法，有下列几种常用方法：

(1)直接验证线性空间的一个基为标准正交基；

(2)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间任一个基，则可用施密特正交方法使其标准正交化；

(3)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s<n)$ 是 n 维欧氏空间的正交向量组，可先扩充为正交基，再单位化.

例 6 设 $\alpha_1=(1,0,2,0)$，$\alpha_2=(0,2,0,3)$，$\alpha_3=(2,6,4,9)$. 试

把 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的基底，扩充成 R^4 的一个基，并将它标准正交化.

解法一 先将已知向量扩充为 R^4 的基，再用施密特正交化方法.

对以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为行向量的矩阵施行初等交换.

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&2&0&3\\2&6&4&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&2&0&3\\0&6&0&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

矩阵的秩为 2，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，但 α_1,α_2 线性无关，故 α_1,α_2 是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个基. 又知 $\beta_1=(1,0,0,0),\beta_2=(0,1,0,0),\beta_3=(0,0,1,0),\beta_4=(0,0,0,1)$ 是 R^4 的一个基，易证 $\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，它们也是 R^4 的一个基，对它正交化得

$$\varepsilon_1=\alpha_1=(1,0,2,0)$$

$$\varepsilon_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1=(0,2,0,3)$$

$$\varepsilon_3=\beta_1-\frac{(\beta_1,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\beta_1,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2=(\frac{4}{5},0,-\frac{2}{5},0)$$

$$\varepsilon_4=\beta_2-\frac{(\beta_2,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\beta_2,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2-\frac{(\beta_2,\varepsilon_3)}{(\varepsilon_3,\varepsilon_3)}\varepsilon_3=(0,\frac{9}{13},0,-\frac{6}{13})$$

对 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 单位化，得

$$\eta_1=(\frac{\sqrt{5}}{5},0,\frac{2\sqrt{5}}{5},0),\quad \eta_2=(0,\frac{2\sqrt{13}}{13},0,\frac{3\sqrt{13}}{13})$$

$$\eta_3=(\frac{2\sqrt{5}}{5},0,-\frac{\sqrt{5}}{5},0),\quad \eta_4=(0,\frac{3\sqrt{13}}{13},0,-\frac{2\sqrt{13}}{13})$$

是所求的标准正交基.

解法二 将 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的基扩充为 R^4 的正交基，再单位化.

因为 $\alpha_3=2\alpha_1+3\alpha_2$，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关且 $(\alpha_1,\alpha_2)=0$，所以 α_1,α_2 是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个正交基.

设 $\alpha_4=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4$ 是与 α_1,α_2 正交的向量，则 $(\alpha_1,\alpha_4)=(\alpha_2,\alpha_4)=0$，故

$$\begin{cases} x_1+2x_3=0 \\ 2x_1+3x_4=0 \end{cases}$$

求出该方程组的一组解，如 $x_1=2, x_2=0, x_3=-1, x_4=0$ 则 $\alpha_4=(2,0,-1,0)$.

又设 $\alpha_5=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in R^4$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 正交，则仿上面的方法求出方程组

$$\begin{cases} y_1+2y_3=0 \\ 2y_2+3y_4=0 \\ 2y_1-y_3=0 \end{cases}$$

的一组解，如 $\alpha_5=(0,3,0,-2)$.

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 是由 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的基底扩充成的 R^4 的正交基，把它们单位化，得到 R^4 的一个标准正交基.

三、长度、夹角

例 7 设 α 与 β 是欧氏空间的两个非零向量，试证明，存在正实数 λ 使 $\beta=\lambda\alpha$ 的充要条件是 α,β 的夹角 θ 为零.

证明 必要性 设 $\beta=\lambda\alpha$，λ 为正实数，由于

$$\cos\theta=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\,|\beta|}=\frac{(\alpha,\lambda\alpha)}{|\alpha|\,|\lambda\alpha|}=1$$

且 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，得 $\theta=0$.

充分性 设 $\theta=0$，则 $\cos\theta=\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\,|\beta|}=1$，故 $(\alpha,\beta)=|\alpha|\,|\beta|$.

即
$$(\alpha,\beta)^2=(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) \tag{8}$$

再证 α,β 线性相关. 事实上，若 α,β 线性无关，则对任何实数 t，有 $t\alpha+\beta\neq 0$. 于是 $(t\alpha+\beta,t\alpha+\beta)>0$

即
$$t^2(\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)>0$$

故
$$\Delta=4(\alpha,\beta)^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)<0$$

即 $(\alpha,\alpha)^2<(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$. 与(8)矛盾，故 α,β 线性相关. 于是有 $\beta=\lambda\alpha(\lambda\neq 0)$. 下面证 λ 是正实数.

因 $(\alpha,\beta)=|\alpha|\,|\beta|$，故 $(\alpha,\lambda\alpha)=|\alpha|\,|\lambda|\,|\alpha|$，

即　　$\lambda(\alpha,\alpha)=|\lambda||\alpha|^2$. 由 $\alpha\neq 0$ 知 $\lambda=|\lambda|$.

因 $\lambda\neq 0$,故 λ 为正实数.

例 8　设 V 是 n 维欧氏空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 V 中向量,$(\alpha_i,\alpha_j)=0(i\neq j)$,$(\alpha_i,\alpha_j)=1(i,j=1,2,\cdots,m)$. 证明:

$$(1)\ |(\alpha_1,x)|^2+\cdots+|(\alpha_m,x)|^2\leqslant|x|^2,x\in V \qquad (9)$$

(2)当且仅当 x 属于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 所生成的子空间,(9)式等号才成立.

证明　(1)由题设条件,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 V 的一个标准正交组,将它扩充为 V 的一个标准正交基:

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$$

设 $x\in V$,则 $x=(\alpha_1,x)\alpha_1+(\alpha_2,x)\alpha_2+\cdots+(\alpha_n,x)\alpha_n$

所以　$(x,x)=|(\alpha_1,x)|^2+|(\alpha_2,x)|^2+\cdots+|(\alpha_n,x)|^2$

$$\geqslant|(\alpha_1,x)|^2+|(\alpha_2,x)|^2+\cdots+|(\alpha_m,x)|^2$$

即　　$|(\alpha_1,x)|^2+|(\alpha_2,x)|^2+\cdots+|(\alpha_m,x)|^2\leqslant|x|^2$

(2)若 $x\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$,则

$$x=(\alpha_1,x)\alpha_1+(\alpha_2,x)\alpha_2+\cdots+(\alpha_m,x)\alpha_m$$

所以 $(x,x)=|(\alpha_1,x)|^2+|(\alpha_2,x)|^2+\cdots+|(\alpha_m,x)|^2$

即　$|(\alpha_1,x)|^2+|(\alpha_2,x)|^2+\cdots+|(\alpha_m,x)|^2=|x|^2$

反之,若(9)式取等号,由 $x=(\alpha_1,x)\alpha_1+(\alpha_2,x)\alpha_2+\cdots+(\alpha_n,x)\alpha_n$ 知　$|(\alpha_{m+1},x)|^2+\cdots+|(\alpha_n,x)|^2=0$

所以　　$(\alpha_{m+1},x)=\cdots=(\alpha_n,x)=0$

因此　$x=(\alpha_1,x)\alpha_1+\cdots+(\alpha_m,x)\alpha_m\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

故当且仅当 $x\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$时,(9)中式子取等号.

例 9　$n(>0)$维欧氏空间中最多有 $n+1$ 个向量,使两两间夹角大于 90°.

分析　两向量 α,β 的夹角大于 90°,等价于$(\alpha,\beta)<0$,因此只须证明 n 维欧氏空间中至多有 $n+1$ 个向量,两两间内积为负.

证明　当 $n=1$ 时,一维欧氏空间的任意三个向量中,至少有

两个向量的夹角为 0，因此要两两间夹角大于 90°最多只能是两个向量，故结论成立.

设 $n=k-1$ 时，结论成立.

当 $n=k$ 时，设 k 维欧氏空间 V 中存在 $k+2$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+2}$使得

$$(\alpha_i,\alpha_j)<0 \qquad (i,j=1,2,\cdots,k+2,i\neq j)$$

将 α_1 单位化，记为 e_1，并将它扩充为 V 的一个标准正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_k$，在这个基下，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+2}$的坐标分别为

$$(|\alpha_1|,0,\cdots,0),(a_{21},\cdots,a_{2k}),\cdots,(a_{k+2\,1},\cdots,a_{k+2\,k})$$

$$\because \quad (\alpha_1,\alpha_i)=|\alpha_1|a_{i1}<0, \quad \therefore \quad a_{i1}<0(i=2,3,\cdots,k+2)$$

令 $\qquad \beta_i=\sum_{t=2}^{k}a_{it}e_t \quad (i=2,3,\cdots,k+2)$

则 $\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{k+2}$是 $k-1$ 维欧氏空间 $L(e_2,\cdots,e_k)$的 $k+1$ 个向量，下面证明$(\beta_i,\beta_j)<0 \quad (i,j=2,3,\cdots,k+2,i\neq j)$. 由于

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\sum_{t=1}^{k}a_{it}a_{jt}=a_{i1}a_{j1}+\sum_{t=2}^{k}a_{it}a_{jt}<0$$

且 $\qquad a_{i1}a_{j1}>0 \qquad (i,j=2,3,\cdots,k+2,i\neq j)$

于是 $\quad (\beta_i,\beta_j)=\sum_{t=2}^{k}a_{it}a_{jt}<0 \quad (i,j=2,3,\cdots,k+2,i\neq j)$. 这与归纳假设矛盾.

因而$\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+2}$不可能两两夹角都大于90°，故对任意有限 $n(>0)$维欧氏空间结论成立.

例10 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是欧氏空间的一组线性无关向量，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是由这组向量通过正交化方法所得的正交组，证明这两个向量组的格拉姆行列式相等.

证明 由正交化公式知

$$\beta_k=a_{1k}\alpha_1+a_{2k}\alpha_2+\cdots+a_{k-1\,k}\alpha_{k-1}+\alpha_k(k=1,\cdots,n)$$

令 $$P=(p_{ij})=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

则 $$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

令 $A=\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$B=\Delta(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(b_{ij})$为二向量组的格拉姆矩阵.

则 $$b_{kl}=(\beta_k,\beta_l)=\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ik}\alpha_i,\sum_{j=1}^{n}p_{jl}\alpha_j\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{ik}(\alpha_i,\alpha_j)p_{jl}$$

等式右端正是矩阵 $P'AP$ 的第 k 行第 l 列位置的元素，于是 $B=P'AP$. 两边取行列式，得

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=G(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_1)(\beta_2,\beta_2)\cdots(\beta_n,\beta_n)$$

§4 正交子空间

基本概念与结论

一、正交子空间

1. 设 V_1,V_2 是欧氏空间 V 中两个子空间，如果对于任意 $\alpha\in V_1,\beta\in V_2$，恒有$(\alpha,\beta)=0$，则称 V_1,V_2 为**正交的**，记为 $V_1\perp V_2$. 一个向量 α，如果对于任意的 $\beta\in V_1$，恒有$(\alpha,\beta)=0$，则称 α **与子空间** V_1 **正交**或 α **垂直于** V_1，记为 $\alpha\perp V_1$.

2. 关于正交的子空间，有如下结论：

(1)若 $V_1\perp V_2$，则 $V_1\cap V_2=\{0\}$；

(2)若 $\alpha\perp V_1$，且 $\alpha\in V_1$，则 $\alpha=0$；

(3)若子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 两两正交，则和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和.

3. 若V是欧氏空间，$\alpha \in V$，$V_1 = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ $(\alpha_i \in V)$，则$\alpha \perp V_1$ $\Longleftrightarrow \alpha \perp \alpha_i (i=1,2,\cdots,k)$.

二、正交补空间

1. 如果$V_1 \perp V_2$，并且$V_1 \dotplus V_2 = V$，则称子空间V_2为子空间V_1的**正交补空间**，简称**正交补**.

显然，正交补具有对称性，即V_2是V_1的正交补，那么V_1也是V_2的正交补.

2. 欧氏空间的每一个有限维子空间V_1都有唯一的正交补空间，记为$V_1^{\perp}$.

3. 正交补空间有下列性质：

(1)设V_1是欧氏空间V的子空间，则$V_1^{\perp}$恰由V中所有与V_1正交的向量组成；

(2)令$V = V_1 \dotplus V_1^{\perp}$，则任意$\alpha \in V$都可唯一地分解为$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，其中$\alpha_1 \in V_1$，$\alpha_2 \in V_1^{\perp}$，称$\alpha_1$为向量$\alpha$在子空间$V_1$上的**内射影**.

三、向量到子空间的距离

1. 欧氏空间中$\alpha - \beta$的长度$|\alpha - \beta|$称为向量α和β的**距离**，记为$d(\alpha, \beta)$.

距离有如下基本性质：

(1)对称性　　$d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha)$；

(2)非负性　　$d(\alpha,\beta) \geqslant 0$，并且仅当$\alpha = \beta$时，等号才成立；

(3)三角不等式　$d(\alpha,\beta) \leqslant d(\alpha,\gamma) + d(\gamma,\beta)$.

2. 设W是欧氏空间V的子空间，$\beta \in V$，则$\forall\ \gamma \in W$，如果$\beta - \gamma \perp W$，则对W中任一向量δ，恒有

$$|\beta - \gamma| \leqslant |\beta - \delta|$$

即向量到子空间各向量间的距离以垂线最短.

四、欧氏空间的同构

1. 设V, V'是实数域R上的两个欧氏空间，如果σ是V到V'的一个双射，且具有以下性质：

(1)$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$;

(2)$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$;

(3)$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$.

其中 $\alpha,\beta\in V,k\in R$,这样的映射 σ 称为 V 到 V' 的**同构映射**.若 V 与 V' 之间存在同构映射 σ,就称欧氏空间 V 与 V' 是**同构**的.

欧氏空间的同构映射除具有线性空间同构映射的所有性质外,还保持标准正交基,即 σ 把 V 的标准正交基映射成 V' 的标准正交基.

2. 有限维欧氏空间同构的充要条件是它们的维数相同.

应用举例

例 1 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为欧氏空间 V 的一个基,$\beta,\gamma\in V$,求证:

(1)如果$(\beta,\alpha_i)=0,i=1,2,\cdots,n$,则 $\beta=0$;

(2)如果$(\beta,\alpha_i)=(\gamma,\alpha_i),i=1,2,\cdots,n$.则 $\beta=\gamma$.

证明 (1)因$(\beta,\alpha_i)=0$,故$\forall\ a\in R$ 有 $a(\beta,\alpha_i)=(\beta,a\alpha_i)=0$.设

$\beta=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$

而 $(\beta,\beta)=(\beta,a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n)=(\beta,a_1\alpha_1)+\cdots+(\beta,a_n\alpha_n)=0$ 所以 $\beta=0$.

(2)因$(\beta,\alpha_i)=(\gamma,\alpha_i)$,即$(\beta-\gamma,\alpha_i)=0$,从(1)知 $\beta-\gamma=0$,故 $\beta=\gamma$.

例 2 设 V_1,V_2 是 n 维欧氏空间 V 的任二非空子集,令 $V_i'=\{\alpha\in V\mid\forall\ \beta\in V_i,(\alpha,\beta)=0\}$ $(i=1,2)$ 证明:(1)V_i' 是 V 的一个子空间(称为 V_i 的**正交子空间**).

(2)若 $V_1\subseteq V_2$,则 $V_2'\subseteq V_1'$,这个论断反过来也成立吗?

(3)若 V_i 是 V 的子空间,则 V_i' 是 V_i 的正交补.

注意 本题(1),(2)中 V_i 是欧氏空间的任一非空子集,不一定是子空间.

证明 (1)由 V_i' 定义知,$0\in V_i'$,所以 V_i' 非空.其次,设 $\alpha_1,\alpha_2\in$

V_i' 则对 V_i 中任何向量 β，有 $\alpha_1 \perp \beta, \alpha_2 \perp \beta$，因此

$$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1(\alpha_1,\beta)+k_2(\alpha_2,\beta)=0 \quad (k_1,k_2\in R)$$

即 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\in V_i'$，从而 V_i' 构成 V 的一个子空间.

(2)设 $\alpha\in V_2'$，则 $\alpha\perp V_2$，由于 $V_1\subseteq V_2$，从而 $\alpha\perp V_1$，故 $\alpha\in V_1'$，因此，$V_2'\subseteq V_1'$.

但反过来，结论不一定成立. 例如对任一非零空间 V，令 $V_1=\{0\}$，$V_2=\{\alpha\}(\alpha\neq 0)$，则 $V_1'=V$ 且 $V_2'\subseteq V=V_1'$，但 $V_1\nsubseteq V_2$.

(3)根据正交补定义，只需证 $V_i'+V_i=V$ 且 $V_i'\cap V_i=\{0\}$.

若 $V_i=\{0\}$，结论显然成立.

若 V_i 为 $m(m>0)$ 维子空间，任取 V_i 的一个标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$，$\forall\ \beta\in V$，令

$$\gamma=(\beta,\varepsilon_1)\varepsilon_1+(\beta,\varepsilon_2)\varepsilon_2+\cdots+(\beta,\varepsilon_m)\varepsilon_m$$

则 $\gamma\in V_i$ 且 $\beta=\gamma+(\beta-\gamma)$，下面证 $\beta-\gamma\in V_i'$.

$$(\beta-\gamma,\varepsilon_i)=(\beta,\varepsilon_i)-(\gamma,\varepsilon_i)=(\beta,\varepsilon_i)-(\beta,\varepsilon_i)=0 \quad (i=1,\cdots,m)$$

即 $\beta-\gamma$ 与 $\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,m)$ 正交，从而与 V_i 的每个向量正交，因此 $\beta-\gamma\in V_i'$. 但 $\gamma\in V_i$，故 $\beta\in V_i+V_i'$，于是 $V=V_i+V_i'$.

又设 $\alpha\in V_i\cap V_i'$，则 $\alpha\in V_i$ 且 $\alpha\in V_i'$，因此 $(\alpha,\alpha)=0$，即 $\alpha=0$，故 $V_i\cap V_i'=\{0\}$. 于是

$$V=V_i\dot{+}V_i'$$

所以 V_i' 是 V_i 的正交补.

利用欧氏空间中子空间的正交补是解决欧氏空间中有关正交问题的一个值得注意的手段与技巧.

例 3 设 V_1 和 V_2 是 n 维欧氏空间 V 的线性子空间，且 V_1 的维数小于 V_2 的维数，证明：在 V_2 中必有一个非零向量正交于 V_1 中的一切向量.

分析 与子空间 V_1 的一切向量正交的向量必属于它的正交补空间 $V_1^{\perp}$，因而只要证明 V_2 中必有非零向量属于 $V_1^{\perp}$ 就行了.

证明 由题设，V_1 在 V 中有正交补 $V_1^{\perp}$：

$$V=V_1\dotplus V_1^{\perp}$$

令 $\dim V_1=n_1$，则 $\dim V_1^{\perp}=n-n_1$.

对于 V 的子空间 V_2 和 $V_1^{\perp}$，或者 $V_2\cap V_1^{\perp}=\{0\}$，或者 $V_2\cap V_1^{\perp}\neq\{0\}$，二者必居其一.

如果 $V_2\cap V_1^{\perp}=\{0\}$，且 $\dim V_2=n_2>n_1$，则

$$\dim(V_2+V_1^{\perp})=\dim V_2+\dim V_1^{\perp}=n_2+(n-n_1)=n+(n_2-n_1)>n.$$

这是不可能的. 所以必有 $V_2\cap V_1^{\perp}\neq\{0\}$，但 $V_2\cap V_1^{\perp}\neq\varnothing$，所以存在非零向量 $\alpha\in V_2\cap V_1^{\perp}$，于是

$$\alpha\in V_2,\quad \alpha\in V_1^{\perp}$$

即 V_2 中的非零向量 α 正交于 V_1 中的一切向量.

例 4 设 V_1 为 n 维欧氏空间 V 的子空间，$\alpha\in V$，证明：在 V_1 中存在唯一向量 α_0，使 $\alpha-\alpha_0$ 与 V_1 中任一向量正交.

分析 要证 $\alpha-\alpha_0$ 与 V_1 中任一向量正交，只须证明存在唯一向量 $\alpha_0\in V_1$，使 $\alpha-\alpha_0\in V_1^{\perp}$ 即可。

证明 先证明存在性 因 V_1 在 V 中有正交补 $V_1^{\perp}$，使 $V=V_1\dotplus V_1^{\perp}$. 故 $\alpha=\alpha_0+\beta$，其中 $\alpha_0\in V_1$，$\beta\in V_1^{\perp}$，于是 $\alpha-\alpha_0=\beta\in V_1^{\perp}$，即 $\alpha-\alpha_0$ 与 V_1 中任意向量正交.

再证唯一性 若还有 $\alpha_0'\in V_1$，$\alpha-\alpha_0'$ 与 V_1 中任意向量正交，则

$$(\alpha-\alpha_0')-(\alpha-\alpha_0)=\alpha_0-\alpha_0'$$

与 V_1 中任意向量正交，又因为 $\alpha_0-\alpha_0'\in V_1$，所以

$$(\alpha_0-\alpha_0',\alpha_0-\alpha_0')=0$$

故 $\alpha_0-\alpha_0'=0$，即 $\alpha=\alpha_0'$.

例 5 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\quad(i=1,2,\cdots,s)$ 是 s 个 n 维向量. $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，$W_2$ 是实系数线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}\tag{10}$$

的解空间，证明在欧氏空间 R^n 中 W_2 是 W_1 的正交补.

证明 设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是 W_2 的一个基，即为方程组(10)的一个基础解系，则 $\beta_i(i=1,2,\cdots,t)$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 都正交. 因此 $\beta_i\in W_1^\perp$，$W_2\subseteq W_1^\perp$.

但$\forall\ \xi\in W_1^\perp$，有$(\xi,\alpha_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,s)$

故 ξ 是线性方程组(10)的解，即 $\xi\in W_2$，因此 $W_1^\perp\subseteq W_2$

故
$$W_2=W_1^\perp$$

例 6 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是欧氏空间 R^n 中向量，如果$(\alpha_i,\beta_j)=0\quad(i=1,\cdots,s,j=1,\cdots,t)$，试证

$$\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+\text{秩}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\leqslant n$$

分析 由于向量组的秩等于该向量组生成的子空间的维数，而子空间的维数又等于其正交基所含向量的个数，因此，可从取子空间的正交基方面思考.

证明 设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

由于
$$(\alpha_i,\beta_j)=0\quad(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$$

于是$\forall\ \alpha\in V_1,\beta\in V_2$. 令 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$，$\beta=l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t$

则
$$(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{t}l_j\beta_j)=0$$

因此
$$V_1\perp V_2$$

分别取 V_1 和 V_2 的一个正交基 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_p},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{i_q}$，则 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_p}$，$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_q}$是 R^n 的一个正交向量组，因而它们线性无关，故

$$p+q\leqslant n$$

即
$$\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+\text{秩}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=p+q\leqslant n$$

例 7 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,n)$是 n 维欧氏空间 R^n 的向量组，令 $A=(a_{ij})$，$B=((\alpha_i,\alpha_j))$和 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$. 证明 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的解空间同构.

分析 解空间是 R^n 的子空间，因而是有限维空间，只须证它们的维数相等，从而仅须证秩 $A=$秩 B.

证法一　用格拉姆矩阵性质.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的秩为 r, $B=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$ 的秩为 s. 不妨设 α_1, $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$

令
$$B_1=((\alpha_i,\alpha_j))_{r\times r}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 由格拉姆矩阵的性质知 $|B_1|\neq 0$, 秩 $B_1=r\leqslant$ 秩 B. 故

$$\text{秩 } A\leqslant \text{秩 } B$$

又因为秩 B 为 s, 则有一 s 阶子式不为零, 不妨设 $B_2=((\alpha_i,\alpha_j))_{s\times s}$ 的行列式不为零, 由格拉姆矩阵性质知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 故

$$\text{秩 } B\leqslant \text{秩 } A$$

综上所述可知, 秩 $A=$ 秩 B, 故两个解空间的维数相等, 因而同构.

证法二　用内积定义.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$

$$\because\quad (\alpha_i,\alpha_j)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk},\qquad \therefore\quad B=AA'$$

由于　秩 $A=$ 秩 $AA'=$ 秩 B, 故两解空间的维数相等, 因而同构.

利用向量到子空间的距离以垂线最短, 可以解决最小二乘法问题.

最小二乘法问题指的是, 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s-b_1=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s-b_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{ns}x_s-b_s=0 \end{cases} \tag{1}$$

可能无解, 使

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{is}x_s-b_i)^2 \tag{2}$$

最小的一组数 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_s^0$ 称为方程组(1)的**最小二乘解**. 求方程组的最小二乘解的问题称为**最小二乘法**问题. 解决这一问题的大

致思路如下.

令 $A=(a_{ij})$, $B=(b_1,b_2,\cdots,b_s)'$

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_s)'$ $Y=AX$

则方程组(1)可表为矩阵形式 $AX=B$. 把 Y,B 都看作 s 维欧氏空间中的向量,(2)就是 $|Y-B|^2$. 求使(2)最小的一组数 $x_1^0,\cdots,x_s^0$,便转化为求 $X_0=(x_1^0,\cdots,x_s^0)'$,使 Y_0 与 B 的距离最短. 应用"垂线最短"的知识,要求的 X_0 应满足 $A'(B-AX)=0$ 或 $A'AX=A'B$.

求方程组(1)最小二乘解的方法是:

1. 把方程组(1)写成矩阵形式:

$$AX=B$$

其中 $A(a_{ij})$, $B=(b_1,b_2,\cdots,b_s)',X=(x_1,x_2,\cdots,x_s)'$.

2. 解线性方程组

$$A'AX=A'B \tag{3}$$

方程组(3)的解 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_s^0$ 就是方程组(1)的最小二乘解.

例 8 求下列方程组的最小二乘解

$$\begin{cases} 0.39x-1.89y=1 \\ 0.61x-1.80y=1 \\ 0.93x-1.68y=1 \\ 1.35x-1.50y=1 \end{cases}$$

解

令 $$A=\begin{pmatrix} 0.39 & -1.89 \\ 0.61 & -1.80 \\ 0.93 & -1.68 \\ 1.35 & -1.50 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

解线性方程组 $A'AX=A'B$,即

$$\begin{pmatrix} 0.39 & 0.61 & 0.93 & 1.35 \\ -1.89 & -1.80 & -1.68 & -1.50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.39 & -1.89 \\ 0.61 & -1.80 \\ 0.93 & -1.68 \\ 1.35 & -1.50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.39 & 0.61 & 0.93 & 1.35 \\ -1.89 & -1.80 & -1.68 & -1.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

化简得

$$\begin{bmatrix} 3.212 & -5.423 \\ -5.423 & 11.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.28 \\ -6.87 \end{bmatrix}$$

解得 $x_0 = 0.195$, $y_0 = 0.489$.

习 题

1. 判断下列集合对给定运算是否构成实数域 R 上的线性空间.

(1)实数域 R 上次数不低于定数 $n(n \in N)$ 的多项式全体并添上零所成的集合,按通常的多项式加法和数与多项式的乘法;

(2)全体实 n 阶方阵的集合 V,按通常矩阵与数相乘的运算及下面定义的加法:

$$A \oplus B = AB - BA;$$

(3)实数域 R 上全体对数 $\lg x (x > 0)$ 的集合 V,按通常对数的加法和数与对数的乘法;

(4)平面上始点在原点,终点在第一象限的向量集合,按向量的加法和数与向量的乘法;

(5)定义在区间$[a,b]$上函数值总为非负数的全体函数所组成的集合 V,按通常函数的加法和数与函数的乘法;

(6)实数域 R 上 n 维向量的集合 $V = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}$ 按通常 n 维向量的加法及数量乘法.

2. 设 $V = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} \mid a, b, c \in Q\}$,证明 V 关于通常数的加法和数的乘法构成有理数域 Q 上的线性空间,并求出它的一个基和维数.

3. 求下列线性空间的一个基,并指出它的维数:

(1)$V = \{X \mid AX = 0\}$,A 为数域 P 上 $m \times n$ 矩阵,秩 $A = r$,X 为数域 P 上的 n

维向量；

(2)实数域上全体形如$\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}$的$n$阶方阵的集合$V$，这里$X_1$为任意$r$阶子块；

(3)复数域上全体n维向量作成的实数域上的线性空间V；

(4)$f(x)$表示实系数多项式，$V=\{f(x)\mid f(1)=0,\partial(f(x))\leqslant n$ 或 $f(x)=0\}$，作成的实数域上的线性空间；

(5)V是由零及数域P上次数为n的两个未知量的齐次多项式作成的线性空间；

4. 证明：线性空间定义的 8 条规则中，“加法满足交换律”可由其余 7 个条件推出.

5. 证明下列各多项式是次数低于n的多项式及零多项式作成的线性空间$P[x]_n$的基：

(1)$f_i(x)=(x-a)^i \quad i=0,1,\cdots,n-1,a\in P,a$ 为定数；

(2)$f_i(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_i),i=1,\cdots,n-1,f_0(x)=1,a_i\neq a_j(i\neq j)$.

6. 设P^n为数域P上全体n维向量所构成的线性空间，证明：

(1)有子空间V_1存在，其中每个非零向量的分量都不是零；

(2)若子空间V_2中每个非零向量的分量都不是零，则V_2必为一维子空间.

7. 设V_1,V_2是线性空间的两个子空间；

(1)试问V_1+V_2与$V_1\cup V_2$是否相等？举例说明.

(2)证明$V_1+V_2=V_1\cup V_2$的充要条件是$V_1\subseteq V_2$，或$V_2\subseteq V_1$.

8. 证明：(1)一个线性空间不能是它的有限个真子空间的并集；

(2)设$V_1,V_2,\cdots,V_s$是n维线性空间V的有限个真子空间，则V中存在一个基，这个基的每个向量都不在$V_1,V_2,\cdots,V_s$中.

9. 设P^n表示数域P上所有$1\times n$矩阵关于矩阵的加法和数乘运算所成的线性空间，令

$$A=(a_{ij})_{m_1\times n},B=(b_{ij})_{m_2\times n},\quad a_{ij},b_{ij}\in P.$$

对任意矩阵　$X=(x_{ij})_{n\times p},x_{ij}\in P$

有$AX=0\Longleftrightarrow BX=0$，证明：$A$的行向量与$B$的行向量生成$P^n$的同一子空间.

10. 设$V_1,V_2,\cdots,V_s$为线性空间V的子空间，证明维数公式：

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{s} V_i\right)=\sum_{i=1}^{s}\dim(V_i)-\sum_{i=2}^{s}\dim\left(V_i\cap\sum_{k=1}^{i-1}V_k\right).$$

11. 设 R_1,R_2,R_3 是线性空间 V 的子空间，证明：(1) $(R_1\cap R_2)+R_3\subseteq(R_1+R_3)\cap(R_2+R_3)$；

(2) $(R_1\cap R_3)+(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1+R_2)\cap R_3$；

(3) $\dim(R_1+R_2+R_3)\leqslant\sum_{i=1}^{3}\dim(R_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3}\dim(R_i\cap R_j)+\dim(R_1\cap R_2\cap R_3)$；

(4)举一个例子，使(3)中不等号成立；

(5)如果 $R_3\subseteq R_1+R_2$，试问 $R_3=(R_1\cap R_3)+(R_2\cap R_3)$ 是否恒成立？如果是，证明之；如果不是，举一个反例.

(6)如果 $V=R_1+R_2$，$R_1\subseteq R_3$，那么(5)中等式是否恒成立？说明理由. 此时条件 $R_1\subseteq R_3$ 是否必要？

12. $V=\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_i\in R,i=1,2,3\}$ 是实数域上的线性空间，$S_1=\{(a_1,a_2,0)\mid a_i\in R,i=1,2\}$，$S_2=\{(0,b_1,b_2)\mid b_i\in R,i=1,2\}$ 是 V 的子空间，且 $V=S_1+S_2$，试问 V 是否为 S_1,S_2 的直和？

13. 证明 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 是直和的充要条件是 $V_1\cap V_2=\{0\}$，$(V_1+V_2)\cap V_3=\{0\}$，…，$(V_1+V_2+\cdots+V_{s-1})\cap V_s=\{0\}$.

14. 设 A 是数域 P 上 n 阶幂等方阵(即 $A^2=A$)，证明 n 维线性空间 P^n 可分解为线性方程组 $AX=0$ 及 $(A-E)X=0$ 各自解子空间的直和，这里 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$.

15. 设数域 P 上线性空间 V 与 V' 同构，σ 是同构映射，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一个基的充要条件是 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 是 V' 的一个基.

16. 设 V 与 V' 都是数域 P 上的 n 维空间，且 $V=V_1+V_2$(V_1,V_2 是 V 的子空间)，证明：在 V' 中存在子空间 V'_1,V'_2 使 $V'=V'_1+V'_2$，且 V_1 与 V_1' 同构，V_2 与 V_2' 同构

17. 试判断三维实线性空间 R^3 内，按下列方法引入的内积是否构成欧氏空间：

(1)定义两向量长度之积为它们的内积，即

$$(\alpha,\beta)=|\alpha||\beta|$$

(2)定义两向量长度与它们夹角余弦的立方之积为它们的内积，即

$$(\alpha,\beta)=|\alpha||\beta|\cos^3\theta$$

(3)定义两向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)$的内积为：

$$(\alpha,\beta)=k(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\quad(k>0)$$

18. 证明：在任意非零欧氏空间 V 中一定存在向量 $\alpha_1\neq\beta_1$，使$(\alpha_1,\beta_1)>0$；同时也存在向量 $\alpha_2\neq\beta_2$，使$(\alpha_2,\beta_2)<0$.

19. 已知方程组

$$\begin{cases}4x_1+3x_2+2x_3+8x_4=a_1\\3x_1+4x_2+x_3+7x_4=a_2\\x_1+x_2+x_3+x_4=a_3\end{cases}$$

(1)试证对任意实数 a_1,a_2,a_3，方程组都有解；

(2)求方程组的一般解；

(3)在欧氏空间 R^4 中，求出长度

$$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$$

最小的解向量.

20. 设 α,β 是欧氏空间两个线性无关的向量，满足以下条件：

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\quad\text{和}\quad\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\text{都是}\leqslant 0\text{的整数}.$$

证明 α 与 β 的夹角只可能是$\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}$或$\frac{5\pi}{6}$.

21. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是欧氏空间 V 的标准正交基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是 V 的任意 k 个向量，试证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 两两正交的充要条件是$\sum_{s=1}^{n}(\alpha_p,e_s)(\alpha_q,e_s)=0(p,q=1,2,\cdots,k$，且 $p\neq q)$.

22. 设 R 为实数域，在欧氏空间 R^n 中，向量 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,n)$两两正交，且$|\alpha_i|=i$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，求 A 的行列式的值.

23. 在 n 维线性空间 R^n 中，定义向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

正交为$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0$，试证：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$是 R^n 中 $n-1$ 个线性无关的向量，向量 $\beta_1,\beta_2\in R^n$ 分别和 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$正交，则 β_1 和 β_2 线性相关.

24. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基，又设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 V 的一组向量，它的格拉姆矩阵为 G，且

$$\alpha_1=a_{11}\varepsilon_1+a_{12}\varepsilon_2+\cdots+a_{1n}\varepsilon_n$$
$$\alpha_2=a_{21}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{2n}\varepsilon_n$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$\alpha_m=a_{m1}\varepsilon_1+a_{m2}\varepsilon_2+\cdots+a_{mn}\varepsilon_n$$

令 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,

证明:(1)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的格拉姆矩阵 $G=AA'$;

(2)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 V 的基的充要条件是 $m=n$,且 G 为正定矩阵.

25. 设 V 为 n 维欧氏空间,证明:对任意 n 阶正定矩阵 A,在 V 中有基 α_1, $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 存在,使其格拉姆矩阵是 A,试问这样的基是否唯一?

26. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是欧氏空间 V 的一个基,证明二次型 $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}(\alpha_i,\alpha_j)x_iy_j$ $(n>2)$的正惯性指数 p 与符号差 s 满足 $2(p+1)=n+s$.

27. 证明实系数线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

有解的充要条件是向量 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^n$ 与齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0 \tag{2}$$

的解空间正交.

28. 设 V 为有限维线性空间,V_1 为非零子空间,如果存在唯一的子空间 V_2,使 $V=V_1\dotplus V_2$ 则 $V_1=V$,试证明之.

29. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 为欧氏空间 V 的两个基,如果

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),\quad i,j=1,2,\cdots,m$$

则子空间

$$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\text{与}V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$$

同构.

30. 求下列方程组的最小二乘解.

$$\begin{cases}0.81x+0.24y=0.50\\0.65x+0.33y=0.29\\0.71x+0.57y=0.45\\0.17x+0.76y=0.14\end{cases}$$

第八章　线性变换与正交变换

§1　线性变换

基本概念与结论

一、映射与线性变换的概念

1. 映射：设 M,M'是两个集合，集合 M 到 M'的一个**映射**是指一个法则 σ，它使 M 中每个元素都有 M'中唯一确定的元素 a'与之对应. a'称为 a 在映射 σ 之下的**象**，记为 $\sigma(a)=a'$或 $\sigma a=a'$，而 a 称为 a'在 σ 之下的一个**原象**.

2. 满射：设 σ 是 M 到 M'的映射. 若$\forall\ \beta\in M'$有 $\alpha\in M$ 使 $\sigma(\alpha)=\beta$，则称 σ 为**满射**.

3. 单射：设 σ 是 M 到 M'的映射. 若$\forall\ \alpha_1,\alpha_2\in M$ 当 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 时，有 $\sigma(\alpha_1)\neq\sigma(\alpha_2)$，则称 σ 为**单射**.

4. 双射：若 σ 为既单且满的映射，就称 σ 是 M 到 M'的一个**双射**，或 M 到 M'上的**一一映射**.

5. M 到 M 自身的映射称为 M 的**变换**.

6. 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的一个变换，若$\forall\ \alpha,\beta\in V,k\in P$，有

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$$

$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$$

则称 σ 是线性空间 V 的一个**线性变换**.

7. 线性变换保持线性组合与线性关系式不变，于是 σ 将线性相关的向量组仍变为线性相关的向量组，但反之不然.

二、线性变换的运算与线性变换的多项式

1. 设 V 是数域 P 上的线性空间，σ,τ,μ 是 V 的线性变换，$\forall\ \alpha\in V$. 则

(1)称由 α 对应于 $\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)$ 所确定的 V 的变换为 σ 与 τ 的**和**，记为 $\sigma+\tau$，即

$$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)$$

(2)称由 α 对应于 $k\sigma(\alpha)$ 所确定的 V 的变换为 k 与 σ 的**数量积**，记为 $k\sigma$，即

$$(k\sigma)\alpha=k\sigma(\alpha)$$

(3)称由 α 对应于 $\sigma(\tau(\alpha))$ 所确定的 V 的变换为 σ 与 τ 的**乘积**，记为 $\sigma\tau$，即

$$(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha))$$

并称求和的运算为**加法运算**，求数量积的运算为**数量乘法运算**，求乘积的运算为**乘法运算**.

2. **零变换**　为由 $0(\alpha)=0$ 所确定的变换，记为 0(其中 α 为 V 中任意向量).

σ 的**负变换**　为由 $(-\sigma)(\alpha)=-\sigma(\alpha)$ 所确定的变换，记为 $(-\sigma)$.

3. **单位变换**　为由 $\iota(\alpha)=\alpha$ 所确定的变换，记为 ι(其中 α 为 V 中任意向量). 单位变换又叫**恒等变换**.

4. 线性变换的运算满足以下运算律：

$$\sigma(\tau\mu)=(\sigma\tau)\mu$$

$$\sigma+(\tau+\mu)=(\sigma+\tau)+\mu$$

$$\sigma+\tau=\tau+\sigma$$

$$\sigma(\tau+\mu)=\sigma\tau+\sigma\mu$$

$$(\tau+\mu)\sigma=\tau\sigma+\mu\sigma$$

$$(kl)\sigma=k(l\sigma)$$

$$(k+l)\sigma=k\sigma+l\sigma$$

$$k(\tau+\sigma)=k\tau+k\sigma$$

$$0+\sigma=\sigma+0=\sigma$$

$$\sigma+(-\sigma)=0$$

$$\iota\sigma=\sigma \quad (\iota \text{ 为恒等变换})$$

其中 $k,l\in P$.

5. 线性变换的多项式

设 V 是数域 P 上的线性空间，σ 是 V 的一个线性变换. 多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in P[x]$，则 $f(\sigma)=a_0\iota+a_1\sigma+\cdots+a_n\sigma^n$ 称为线性变换 σ 的**多项式**，并有以下性质：

若 $g(x)\in P[x]$，$h(x)=f(x)+g(x)$，$t(x)=f(x)g(x)$，则 $h(\sigma)=f(\sigma)+g(\sigma)$，$t(\sigma)=f(\sigma)g(\sigma)$

6. V 的线性变换 σ 称为**可逆的**，如果有 V 的变换 τ 存在使 $\sigma\tau=\tau\sigma=\iota$. 这时称变换 τ 为 σ 的**逆变换**，记为 σ^{-1}.

7. 如果线性变换 σ 是可逆的，那么它的逆变换 σ^{-1} 也是线性变换.

三、n 维线性空间 V 的线性变换与矩阵

1. 线性变换的矩阵

若 σ 是 V 的一个线性变换，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基，且

$$\sigma(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n$$

$$\sigma(\varepsilon_2)=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma(\varepsilon_n)=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n$$

记 $$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))$$

并可用矩阵表示为

$$\begin{aligned}\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)&=(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))\\&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A\end{aligned}$$

其中 $A=(a_{ij})\in P^{n\times n}$，则称 A 为线性变换 σ **在基** $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ **下的矩阵**.

2. 设线性变换 σ 在 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是 A，$x\in V$，且

$x=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\sigma(x)=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$，则

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

3. 在 P 上线性空间 V 的一个固定基下，令线性变换对应于它在这个基下的矩阵，这样就确定了 V 的全体线性变换组成的集合到 $P^{n\times n}$ 的一个双射，且这个双射具有以下性质：线性变换的和对应于矩阵的和；线性变换的乘积对应于矩阵的乘积；线性变换的数量积对应于矩阵的数量积；可逆线性变换对应于可逆矩阵，且逆变换对应于逆矩阵.

4. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 是 V 的两个基，且前者到后者的过渡矩阵是 T，σ 是 V 的线性变换. 令 A 是线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵，B 是线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 下的矩阵，即

$$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$$
$$\sigma(\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n')B$$

则 $B=T^{-1}AT$. 反之也对，即 A、B 相似，当且仅当 A,B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵.

四、线性变换的值域与核

1. 设 σ 是 P 上线性空间 V 的线性变换，集合 $\sigma(V)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\}$ 称为 σ 的**值域**，记为 $\mathrm{Im}(\sigma)$. 集合 $\sigma^{-1}(0)=\{\alpha\in V\mid\sigma(\alpha)=0\}$ 称为 σ 的**核**，记为 $\mathrm{Ker}(\sigma)$.

2. 关于值域与核有以下结论：

(1) $\sigma(V),\sigma^{-1}(0)$ 是 V 的子空间.

(2) σ 是满射当且仅当 $\mathrm{Im}(\sigma)=V$；σ 是单射当且仅当 $\mathrm{Ker}(\sigma)=\{0\}$.

(3)设 V 是 P 上的 n 维线性空间,则有

$$\dim \operatorname{Im}(\sigma)+\dim \operatorname{Ker}(\sigma)=n$$

分别称 $\dim \operatorname{Im}(\sigma)$ 和 $\dim \operatorname{Ker}(\sigma)$ 为 σ 的**秩**和**零度**.

注意　不能由此公式断言 $\operatorname{Im}(\sigma)+\operatorname{Ker}(\sigma)=V$.

例如 $V=P[x]_n$, $\sigma(f(x))=f'(x)$, $f(x)\in P[x]_n$,有 $\operatorname{Im}(\sigma)=P[x]_{n-1}$, $\operatorname{Ker}(\sigma)=P$,而 $P+P[x]_{n-1}\neq P[x]_n$.

(4)若 σ 是有限维线性空间 V 的线性变换,由(2),(3)知 σ 是双射当且仅当它是满射(或单射).

(5)若 σ 在 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A,则 $\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))$, σ 的秩 $=A$ 的秩,即 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 的秩等于 A 的秩.

五、线性变换的特征向量,不变子空间

1. 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换,若对于 $\lambda_0\in P$,存在非零向量 $\xi\in V$,使 $\sigma(\xi)=\lambda_0\xi$,则称 λ_0 是 σ 的一个**特征根**,而 ξ 称为 σ 的属于 λ_0 的一个**特征向量**.

σ 关于 V 的任意一个基的矩阵的特征多项式叫做**线性变换** σ 的**特征多项式**,记作 $f_\sigma(x)$. 由于线性变换 σ 关于 V 的不同基的矩阵是相似的,而相似矩阵有相同的特征多项式,所以 $f_\sigma(x)$ 与基的选取无关.

2. 若 σ 是 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换,则 $\lambda\in P$ 为 σ 的特征根的充分必要条件是:λ 是 σ 在 V 的一个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵 A 的属于 P 的特征根.

3. 设 σ 是 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基,σ 在此基下的矩阵是 A,并且若 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)'$ 是 A 的属于特征根 λ 的特征向量,则 $k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n$ 是 σ 的属于 λ 的特征向量.

4. 若 λ 是 σ 的特征根,则集合 $\{\alpha\in V\mid\sigma\alpha=\lambda\alpha\}$ 是 V 的一个子空间,称此子空间为 σ 的属于特征根 λ 的**特征子空间**,记为 V_λ.

$\dim V_\lambda$ 为属于 λ 的线性无关的特征向量的最大个数.

5. 设 σ 是线性空间 V 的一个线性变换，V_1 是 V 的子空间，若 $\sigma(V_1)\subseteq V_1$，称 V_1 是 σ 的**不变子空间**，简称 σ-子空间.

不变子空间有下述性质：

(1) σ-子空间的交与和是 σ-子空间，

(2) σ 的值域与核都是 σ-子空间，进一步地，$\mathrm{Im}f(\sigma)$，$\mathrm{Ker}f(\sigma)$ 都是 σ-子空间，其中 $f(x)\in P[x]$.

(3) σ 在 σ-子空间 V_1 上能诱导出一个线性变换 $\sigma|_{V_1}$，它满足 $\sigma|_{V_1}(\alpha)=\sigma(\alpha)$，$\alpha\in V_1$，如 $\sigma|_{\sigma^{-1}(0)}=0$，$\sigma|_{V_{\lambda_0}}=\lambda_0\iota$.

(4) V 的子空间 W 是一维 σ-子空间当且仅当 W 由一个特征向量生成.

六、线性变换可以对角化的条件

1. 若 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，如果存在 V 的一个基，使 σ 在此基下的矩阵为对角形，就称 σ **可以对角化**.

2. 若 σ 的特征多项式在 P 内有 n 个单根，则 σ 可以对角化.

3. σ 可以对角化的充分必要条件是：

(1) σ 的特征多项式的根均在 P 内，

(2) 对于 σ 的每个特征根 λ，特征子空间 V_λ 的维数等于 λ 的重数.

这时，

$$V=V_{\lambda_1}\dotplus\cdots\dotplus V_{\lambda_r}$$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是 σ 的一切不同特征根.

应用举例

一、线性变换的定义

例1 设 $A,B,C,D\in P^{n\times n}$，验证 $\sigma:\forall\ X\in P^{n\times n}$

$$\sigma(X)=ABX+CX+XD$$

是 V 的线性变换.

解 对于$P^{n\times n}$中任意矩阵X，通过σ都有唯一确定的$P^{n\times n}$的矩阵$ABX+CX+XD$与之对应，所以σ是$P^{n\times n}$的一个变换.

$\forall\ X,Y\in P^{n\times n},k\in P$ 则

$$\begin{aligned}\sigma(X+Y)&=AB(X+Y)+C(X+Y)+(X+Y)D\\&=ABX+ABY+CX+CY+XD+YD\\&=\sigma(X)+\sigma(Y)\\\sigma(kX)&=AB(kX)+C(kX)+(kX)D\\&=k(ABX+CX+XD)=k\sigma(X)\end{aligned}$$

所以σ是$P^{n\times n}$的线性变换.

例2 R是实数域，$V=R^3=\{(a,b,c)\mid a,b,c\in R\}$.

(1)当a,b,c同号或至少一个为0时，令$\sigma(a,b,c)=(a,b,c)$.

当a,b,c不全同号时，令$\sigma(a,b,c)=(-a,-b,-c)$;

(2)设$\alpha=(a_1,a_2,a_3)$，$\forall\ \xi=(x_1,x_2,x_3)\in V$,

令
$$\tau_\alpha(\xi)=(a_2x_3-a_3x_2,a_3x_1-a_1x_3,a_1x_2-a_2x_1)$$

问σ,τ_α是V的线性变换吗?若是V的线性变换，求出它在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵，这里$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$是$R^3$的标准基.

解 (1)设$(a,b,c)\in V$，由于有唯一确定的$\sigma(a,b,c)\in V$，所以σ是一个变换. 但它不是V的线性变换，因若令$\alpha=(-1,-2,-3)$，$\beta=(-1,-2,1)$，有

$$\begin{aligned}&\sigma(\alpha)=\sigma(-1,-2,-3)=(-1,-2,-3)\\&\sigma(\beta)=\sigma(-1,-2,1)=(1,2,-1)\\&\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(-2,-4,-2)=(2,4,2)\\&\qquad\neq\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)\end{aligned}$$

(2)若$\xi=(x_1,x_2,x_3)\in V$，有唯一确定的$\tau_\alpha(\xi)=(a_2x_3-a_3x_2,a_3x_1-a_1x_3,a_1x_2-a_2x_1)\in V$，所以$\tau_\alpha$是$V$的一个变换. 并且 若$\beta=(b_1,b_2,b_3)$，$\gamma=(c_1,c_2,c_3)\in V$，$k\in R$

$$\tau_\alpha(\beta+\gamma)=\tau_\alpha(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)$$

$$=(a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2),a_3(b_1+c_1)-a_1(b_3+c_3)$$
$$a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1))=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,$$
$$a_1b_2-a_2b_1)+(a_2c_3-a_3c_2,a_3c_1-a_1c_3,a_1c_2-a_2c_1)$$
$$=\tau_\alpha(\beta)+\tau_\alpha(\gamma)$$
$$\tau_\alpha(k\beta)=\tau_\alpha(kb_1,kb_2,kb_3)$$
$$=k(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)=k\tau_\alpha(\beta)$$

所以，τ_α 是 V 的一个线性变换.

因 $\tau_\alpha(\varepsilon_1)=(0,a_3,-a_2)$，$\tau_\alpha(\varepsilon_2)=(-a_3,0,a_1)$，$\tau_\alpha(\varepsilon_3)=(a_2,-a_1,0)$，故 τ_α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 之下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

二、线性变换与矩阵

求线性变换在某个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵，由定义可求出基向量的象 $\sigma(\varepsilon_i)$ 的坐标，并以此为列所得各矩阵即为所求. 也可以用不同基下的矩阵相似关系来求出，看下例.

例3 线性变换 σ 在基 e_1,e_2,e_3,e_4 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

求这个线性变换在以下基下的矩阵：

(1) e_1,e_3,e_2,e_4；

(2) $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4$；

解 (1)由假设，得

$$\begin{aligned} \sigma(e_1)&=e_1+3e_2+2e_3+e_4 \\ \sigma(e_2)&=2e_1\qquad\;\;+5e_3+2e_4 \\ \sigma(e_3)&=\qquad-e_2\;+3e_3+e_4 \\ \sigma(e_4)&=e_1+2e_2+e_3+3e_4 \end{aligned} \quad \text{即} \quad \begin{aligned} \sigma(e_1)&=e_1+2e_3+3e_2+e_4 \\ \sigma(e_3)&=\qquad 3e_3-e_2\;+e_4 \\ \sigma(e_2)&=2e_1+5e_3\qquad\;+2e_4 \\ \sigma(e_4)&=e_1+e_3+2e_2+3e_4 \end{aligned}$$

所以，σ 在基 e_1,e_3,e_2,e_4 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)解法一　设

$$\sigma(e_1)=x_1e_1+x_2(e_1+e_2)+x_3(e_1+e_2+e_3)+x_4(e_1+e_2+e_3+e_4)$$

即
$$e_1+3e_2+2e_3+e_4=(x_1+x_2+x_3+x_4)e_1+(x_2+x_3+x_4)e_2+(x_3+x_4)e_3+x_4e_4$$

于是得　$x_1=-2,x_2=1,x_3=1,x_4=1$，所以

$$\sigma(e_1)=-2e_1+1(e_1+e_2)+1(e_1+e_2+e_3)+1(e_1+e_2+e_3+e_4)$$

类似地，有

$$\sigma(e_1+e_2)=-4(e_1+e_2)+4(e_1+e_2+e_3)+3(e_1+e_2+e_3+e_4)$$

$$\sigma(e_1+e_2+e_3)=1e_1-8(e_1+e_2)+6(e_1+e_2+e_3)+4(e_1+e_2+e_3+e_4)$$

$$\sigma(e_1+e_2+e_3+e_4)=-7(e_1+e_2)+4(e_1+e_2+e_3)+7(e_1+e_2+e_3+e_4)$$

所以，σ 在基 $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4$ 之下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

解法二　设 σ 在基 $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4$ 之下的矩阵是 B，则 $B=P^{-1}AP$，其中 P 是基 e_1,e_2,e_3,e_4 到 $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4$ 的过渡矩阵，A 是 σ 在基 e_1,e_2,e_3,e_4 下的矩阵，

即
$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

所以

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-4&-8&-7\\1&4&6&4\\1&3&4&7\end{pmatrix}$$

在研究线性变换的运算有关问题中，由于在一个固定基下，线性变换与所对应的矩阵之间存在双射，且它保持加法、数量乘法以及乘法运算. 因而在证明有关线性变换的运算的问题时，可以利用这种关系，将问题转化为关于矩阵的运算问题来处理. 一般说来，由于处理矩阵运算的问题较之处理线性变换的运算问题容易些，因而这类转化比较常见和重要.

例4 设 V 是 n 维线性空间，证明 V 的任意非零线性变换必可表为一个可逆线性变换与一个幂等线性变换的乘积(满足 $\sigma^2=\sigma$ 的线性变换称为**幂等线性变换**).

分析 考虑把问题转化为相应的矩阵问题.

证明 设 σ 是 V 的非零线性变换，σ 在 V 的一个基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下的矩阵是 A. 令秩 $A=r$，则 $r\geqslant1$，于是存在可逆矩阵 P,Q 使

$$A=P\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q=PQQ^{-1}\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q$$
$$=RS$$

其中 E_r 是 r 阶单位矩阵，$R=PQ$ 为可逆矩阵，$S=Q^{-1}\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q$ 为幂等矩阵.

令 τ,μ 是 V 的线性变换，它们关于基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的矩阵分别是 R,S，则 τ 是可逆线性变换，μ 是幂等变换，且 $\sigma=\tau\mu$.

例5 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$\sigma^{n-1}\neq 0$但 $\sigma^n=0$. 证明：V 的与 σ 可交换的任一线性变换 τ 都可以表示为：

$$\tau=a_0\iota+a_1\sigma+\cdots+a_{n-1}\sigma^{n-1}$$

分析 仿上例我们可以把它转化为相应的矩阵问题来处理. 但这里要注意利用条件 $\sigma^{n-1}\neq 0,\sigma^n=0$来选取基，以使问题简化.

证明 由 $\sigma^n=0$而 $\sigma^{n-1}\neq 0$知存在 $\xi\in V$ 有 $\sigma^{n-1}(\xi)\neq 0$而 $\sigma^n(\xi)=0$. 现考察向量组：$\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)$，可以证明这是 V 的一个基(略)，且 σ 关于基 $\xi,\sigma(\xi),\sigma^2(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)$的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

设 τ 在基 $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)$下的矩阵是 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，$\tau\sigma=\sigma\tau$，由线性变换与在给定基下的矩阵间的关系，有 $BA=AB$，即

$$\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

于是得

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & & & & \\ b_{21} & b_{11} & & & \\ \vdots & b_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}=b_{11}E+b_{21}A+\cdots+b_{n1}A^{n-1}$$

其中 E 是 n 阶单位方阵.

令 $b_{11}=a_0, b_{21}=a_1, \cdots, b_{n1}=a_{n-1}$，则

$$B=a_0E+a_1A+\cdots+a_{n-1}A^{n-1}$$

从而 $\tau=a_0\iota+a_1\sigma+\cdots+a_{n-1}\sigma^{n-1}$.

例6 设 V 是有理数域 Q 上的三维线性空间，e_1, e_2, e_3 是 V 的一个基. σ 是 V 的线性变换且 $\sigma(e_1)=e_1+e_3, \sigma(e_2)=e_2, \sigma(e_3)=e_1-e_3$，证明矩阵 A 与 B 相似，并求出矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$. 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

分析 为证明 A 与 B 相似，可以证明 A 与 B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵.

证明 因 $\sigma(e_1)=e_1+e_3, \sigma(e_2)=e_2, \sigma(e_3)=e_1-e_3$，故 σ 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵是 A，即

$$\sigma(e_1, e_2, e_3)=(e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

取另一组基 e_1', e_2', e_3' 并令

$$\begin{aligned} e_1' &= x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 \\ e_2' &= y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3, \\ e_3' &= z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3 \end{aligned} \quad P=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

即

$$(e'_1,e'_2,e'_3) = (e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

设 σ 在 e'_1,e'_2,e'_3下的矩阵为 B,则 $B=P^{-1}AP$,于是得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因而得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - y_1 = 0 \\ x_2 - y_2 = 0 \\ x_1 - x_3 - y_3 = 0 \\ y_1 + y_3 - z_1 = 0 \\ y_2 - z_2 = 0 \\ y_1 - y_3 - z_3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

令 $y_1=y_2=y_3=1$,解得 $x_1=1,x_2=1,x_3=0,z_1=2,z_2=1,z_3=0$,这组值使 P 的行列式 $|P|\neq 0$,故 $e'_1=e_1+e_2,e'_2=e_1+e_2+e_3,e'_3=2e_1+e_2$ 是 V 的一个基,而 σ 在此基下的矩阵是 B,从而 A,B 相似,且从 e_1,e_2,e_3到 e'_1,e'_2,e'_3的过渡矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

而 $B=P^{-1}AP$.

例7 证明

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

相似,其中$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$是$(1,2,\cdots,n)$的一个排列.

证明 设 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 在某基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 之下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则 σ 在基 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}$ 下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

故 A, B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵,因此 A 与 B 相似.

三、线性变换的核与值域

例8 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是数域 P 上四维空间 V 的一个基,已知线性变换 σ 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

求 σ 的核与值域.

解 $\mathrm{Ker}(\sigma) = \{\alpha \in V \mid \sigma(\alpha) = 0\}$, $\alpha \in \mathrm{Ker}(\sigma)$ 的充要条件是,$\sigma(\alpha) = 0$. 若 $\alpha \in \mathrm{Ker}(\sigma)$,令

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

则

$$\sigma(\alpha)=\sigma((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix})=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

这里 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}$. 由 $\sigma(\alpha)=0$,得 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$

解得此齐次线性方程组的基础解系为$(-2,-\frac{3}{2},1,0)$,$(-1,-2,0,1)$,即Ker(σ)的基向量的坐标,因此$\alpha_1=-2\varepsilon_1-\frac{3}{2}\varepsilon_2+\varepsilon_3$,$\alpha_2=-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4$是 Ker($\sigma$)的一个基,所以 $\mathrm{Ker}(\sigma)=L(\alpha_1,\alpha_2)$.

$\mathrm{Im}(\sigma)=\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3),\sigma(\varepsilon_4))$,而$\sigma(\varepsilon_1)$,$\sigma(\varepsilon_2)$,$\sigma(\varepsilon_3)$,$\sigma(\varepsilon_4)$在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的坐标分别为矩阵 A 的第1,2,3,4列.由于 A 的秩为2故 $\sigma(\varepsilon_1)$,$\sigma(\varepsilon_2)$,$\sigma(\varepsilon_3)$,$\sigma(\varepsilon_4)$的秩为2,又 A 的第1列与第2列线性无关,故$\sigma(\varepsilon_1)$,$\sigma(\varepsilon_2)$是$\sigma(V)$的一个基,即$\mathrm{Im}(\sigma)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2))$.

由本题可以总结出求线性变换的核与值域的方法:(1)求线性变换 σ 的核就是解相应的齐次线性方程组 $AX=0$(其中 A 是 σ 在给定基下的矩阵),该方程组的基础解系便是 Ker(σ)的基向量在给定基下的坐标.(2)求 σ 的值域 Im(σ)的基,只须求出 A 的列向量组的极大无关组便是 Im(σ)的基向量在给定基下的坐标.

例9 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换,若 $f(x),g(x)\in P[x]$,$h(x)=f(x)g(x)$,证明:

(1)$\mathrm{Ker}f(\sigma)+\mathrm{Ker}g(\sigma)\subseteq\mathrm{Ker}h(\sigma)$;

(2)若$(f(x),g(x))=1$,则 $\mathrm{Ker}f(\sigma)+\mathrm{Ker}g(\sigma)=\mathrm{Ker}h(\sigma)$.

证明 (1)若 $\alpha\in\mathrm{Ker}f(\sigma)+\mathrm{Ker}g(\sigma)$ 则 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1\in\mathrm{Ker}f(\sigma)$,$\alpha_2\in\mathrm{Ker}g(\sigma)$,因 $f(\sigma)(\alpha_1)=0$,$g(\sigma)(\alpha_2)=0$,于是

$$
\begin{aligned}
h(\sigma)(\alpha)&=h(\sigma)(\alpha_1+\alpha_2)=h(\sigma)(\alpha_1)+h(\sigma)(\alpha_2)\\
&=f(\sigma)g(\sigma)(\alpha_1)+f(\sigma)g(\sigma)(\alpha_2)\\
&=g(\sigma)(f(\sigma)(\alpha_1))+f(\sigma)(g(\sigma)(\alpha_2))\\
&=g(\sigma)(o)+f(\sigma)(o)=0
\end{aligned}
$$

所以，$\alpha\in \mathrm{Ker}h(\sigma)$.

(2)由(1)知，只须证 $\mathrm{Ker}f(\sigma)+\mathrm{Ker}g(\sigma)\supseteq\mathrm{Ker}h(\sigma)$. 若 $\alpha\in \mathrm{Ker}h(\sigma)$，则 $h(\sigma)(\alpha)=0$.

因 $(f(x),g(x))=1$，存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

从而
$$f(\sigma)u(\sigma)+g(\sigma)v(\sigma)=\iota$$

于是得

$$
\begin{aligned}
\alpha&=\iota\alpha=(f(\sigma)u(\sigma)+g(\sigma)v(\sigma))(\alpha)\\
&=f(\sigma)u(\sigma)(\alpha)+g(\sigma)v(\sigma)(\alpha)=\alpha_1+\alpha_2
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha_1=g(\sigma)v(\sigma)(\alpha)$，$\alpha_2=f(\sigma)u(\sigma)(\alpha)$，因

$$
\begin{aligned}
f(\sigma)(\alpha_1)&=f(\sigma)g(\sigma)v(\sigma)(\alpha)=v(\sigma)(f(\sigma)g(\sigma)(\alpha))\\
&=v(\sigma)(h(\sigma)(\alpha))=v(0)=0
\end{aligned}
$$

所以 $\alpha_1\in \mathrm{Ker}f(\sigma)$，同理可证 $\alpha_2\in \mathrm{Ker}g(\sigma)$，从而 $\alpha\in \mathrm{Ker}f(\sigma)+\mathrm{Ker}g(\sigma)$.

例10 设 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_t$ 是线性空间 V 的线性变换，它满足：

(1)$\sigma_i^2=\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,t)$

(2)$\sigma_i\sigma_j=0, \quad i\neq j \quad (i,j=1,2,\cdots,t)$

证明 V 必可分解为

$$V=\sigma_1V\dotplus\sigma_2V\dotplus\cdots\dotplus\sigma_tV\dotplus\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(o)$$

证明 令 $\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_t=\sigma$，$\forall\ \alpha\in V$ 则

$$
\begin{aligned}
\alpha&=\iota(\alpha)=\sigma(\alpha)+(\iota-\sigma)(\alpha)\\
&=\sigma_1(\alpha)+\sigma_2(\alpha)+\cdots+\sigma_t(\alpha)+(\iota-\sigma)(\alpha)
\end{aligned}
$$

而 $\sigma_i((\iota-\sigma)(\alpha))=\sigma_i(\alpha)-\sigma_i(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_t)(\alpha)=0$

所以 $(\iota-\sigma)(\alpha)\in\sigma_i^{-1}(0)\quad(i=1,2,\cdots,t)$，即 $(\iota-\sigma)\alpha\in\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(o)$，从而 $\alpha\in\sigma_1V+\sigma_2V+\cdots+\sigma_tV+\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(0)$，故 $V\subseteq\sigma_1V+\cdots+\sigma_tV+\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(0)$. 又 $V\supseteq\sigma_1V+\cdots+\sigma_tV+\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(0)$ 于是 $V=\sigma_1V+\cdots+\sigma_tV+\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(0)$.

其次，若 $\alpha\in(\sigma_1V+\cdots+\sigma_tV)\cap(\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(0))$，则

$$\alpha=\sigma_1(\alpha_1)+\cdots+\sigma_t(\alpha_t)$$

且 $\sigma_1(\alpha)=\cdots=\sigma_t(\alpha)=0$，于是

$$\begin{aligned}0&=\sigma_i(\alpha)=\sigma_i(\sigma_1(\alpha_1)+\cdots+\sigma_i(\alpha_i)+\cdots+\sigma_t(\alpha_t))\\&=\sigma_i^2(\alpha_i)=\sigma_i(\alpha_i)\qquad(i=1,2,\cdots,t)\end{aligned}$$

所以 $\alpha=0$，即

$$(\sigma_1V+\cdots+\sigma_tV)\cap(\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(0))=\{0\}$$

又若 $\beta\in\sigma_iV\cap(\sigma_1V+\cdots+\sigma_{i-1}V+\sigma_{i+1}V+\cdots+\sigma_tV+\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(0))$

则

$$\begin{aligned}\beta=\sigma_i(\beta_i)&=\sigma_1(\beta_1)+\cdots+\sigma_{i-1}(\beta_{i-1})+\sigma_{i+1}(\beta_{i+1})+\cdots+\\&\sigma_t(\beta_t)+\beta'\end{aligned}$$

其中 $\sigma_i(\beta_i)\in\sigma_iV$，$\beta'\in\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(0)$，故

$$\begin{aligned}\beta&=\sigma_i(\beta_i)=\sigma_i^2(\beta_i)=\sigma_i(\sigma_1(\beta_1)+\cdots+\sigma_{i-1}(\beta_{i-1})+\sigma_{i+1}\\&(\beta_{i+1})+\cdots+\sigma_t(\beta_t)+\beta')=0\end{aligned}$$

所以 $\sigma_iV\cap(\sigma_1V+\cdots+\sigma_{i-1}V+\sigma_{i+1}V+\cdots+\sigma_tV+\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(0))=\{0\}$ $(i=1,2,\cdots,t)$. 故 $V=\sigma_1V\dotplus\sigma_2V\dotplus\cdots\dotplus\sigma_tV\dotplus\bigcap_{i=1}^{t}\sigma_i^{-1}(0)$.

四、特征根、特征向量和不变子空间

例11 设 σ 是 R 上线性空间 R^3 的线性变换，$\forall\ \alpha=(x,y,z)\in R^3$，$\sigma(\alpha)=\sigma(x,y,z)=(2y+z,-2x+3z,-x-3y)$，求 σ 的特征根与特征向量.

解 取R^3的一个基 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$,则$\sigma$在此基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

解方程$|\lambda E-A|=0$得$\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{14}i,\lambda_3=-\sqrt{14}i$,它们是$A$的特征根,$\sigma$在$R$内的特征根为$\lambda=0$.

对$\lambda=0$,求齐次线性方程组

$$(0E-A)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

即

$$\begin{cases} \qquad -2x_2-x_3=0\\ 2x_1 \qquad -3x_3=0\\ x_1+3x_2 \qquad =0\end{cases}$$

的基础解系为$(3,-1,2)'$,于是A的属于$\lambda=0$的全部特征向量为$\{k(3,-1,2)\,|\,k\in R,k\neq 0\}$. 而$\sigma$的属于$\lambda=0$的全部特征向量为$\{3k\varepsilon_1-k\varepsilon_2+2k\varepsilon_3\,|\,k\in R,k\neq 0\}$.

由此例知,求数域P上线性空间的线性变换σ的特征根以及特征向量可按下列步骤:

(1)取定V的一个基,求出σ在此基下的矩阵A;

(2)求出矩阵A的特征根,其中属于数域P的就是σ的特征根;

(3)若λ是σ的特征根,求出A的属于λ的特征向量,就是σ的属于λ的特征向量在给定基下的坐标,从而求得了σ的属于λ的特征向量.

因为相似矩阵有相同的特征多项式和特征根,而同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的,因此,用上述方法求线性变换的

特征根与基的选取无关.

例12 设 $f(x)$ 是数域 P 上的二次多项式,在 P 内有互异的根 x_1,x_2. σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换,$\sigma\neq x_i\iota$,$(i=1,2)$ 且满足 $f(\sigma)=0$. 证明 x_1 与 x_2 是 σ 的特征根,而 V 可分解为 σ 的属于 x_1,x_2 的特征子空间的直和.

分析 应用 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0,a\in P)$ 和 $f(\sigma)=a(\sigma-x_1\iota)(\sigma-x_2\iota)=0$ 证存在 $\beta\in V,\beta\neq 0$,使 $\sigma\beta=x_i\beta$. 又 $V_{x_1}=\mathrm{Ker}(\sigma-x_1\iota)$,$V_{x_2}=\mathrm{Ker}(\sigma-x_2\iota)$,仅须证 $V=\mathrm{Ker}(\sigma-x_1\iota)\dotplus\mathrm{Ker}(\sigma-x_2\iota)$.

证明 设 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$,则 $f(\sigma)=a(\sigma-x_1\iota)(\sigma-x_2\iota)=0$,因 $\sigma\neq x_2\iota$,所以 $\sigma-x_2\iota\neq 0$,存在 $\alpha\in V,\alpha\neq 0$,使 $(\sigma-x_2\iota)(\alpha)\neq 0$. 令 $\beta=(\sigma-x_2\iota)(\alpha)$,则

$$(\sigma-x_1\iota)\beta=(\sigma-x_1\iota)(\sigma-x_1\iota)\alpha=0\alpha=0$$

所以 $\sigma\beta=x_1\beta$,x_1 是 σ 的特征根,同理可证 x_2 是 σ 的特征根.

其次,存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使 $(x-x_1)u(x)+(x-x_2)v(x)=1$,所以 $(\sigma-x_1\iota)u(\sigma)+(\sigma-x_2\iota)v(\sigma)=\iota$,$\forall\ \alpha\in V$,

$$\alpha=\iota\alpha=(\sigma-x_1\iota)u(\sigma)\alpha+(\sigma-x_2\iota)v(\sigma)\alpha$$
$$=\alpha_1+\alpha_2$$

其中 $\alpha_1=(\sigma-x_2\iota)v(\sigma)\alpha$,$\alpha_2=(\sigma-x_1\iota)u(\sigma)\alpha$,而

$$(\sigma-x_1\iota)\alpha_1=(\sigma-x_1\iota)((\sigma-x_2\iota)v(\sigma)\alpha)$$
$$=v(\sigma)((\sigma-x_1\iota)(\sigma-x_2\iota)\alpha)=v(\sigma)(0)=0$$

所以 $\alpha_1\in\mathrm{Ker}(\sigma-x_1\iota)=V_{x_1}$,同理 $\alpha_2\in\mathrm{Ker}(\sigma-x_2\iota)=V_{x_2}$,从而 $V\subseteq V_{x_1}+V_{x_2}$,$V_{x_1}$,$V_{x_2}$ 是 V 的子空间,故 $V=V_{x_1}+V_{x_2}$.

若 $\beta\in V_{x_1}\cap V_{x_2}$,则

$$(\sigma-x_1\iota)\beta=(\sigma-x_2\iota)\beta=0$$

所以 $\sigma\beta=x_1\beta=x_2\beta$,故 $(x_1-x_2)\beta=0$. 由 $x_1\neq x_2$ 知 $\beta=0$,故 $V_{x_1}\cap V_{x_2}=\{0\}$,从而 $V=V_{x_1}\dotplus V_{x_2}$.

例13 设 σ 是实数域 R 上 n 维线性空间 V 的线性变换,$\lambda\in R$,试证 V 的子集 $W=\{\alpha\in V\mid(\sigma-\lambda\iota)^n\alpha=0\}$ 是 σ 的不变子空间.

证明 先证 W 是 V 的子空间. $\forall\ \alpha,\beta\in W,k\in R$,因为

$$(\sigma-\lambda\iota)^n(\alpha+\beta)=(\sigma-\lambda\iota)^n\alpha+(\sigma-\lambda\iota)^n\beta=0$$

所以 $\alpha+\beta\in W$.

$$(\sigma-\lambda\iota)^n(k\alpha)=k((\sigma-\lambda\iota)^n\alpha)=0$$

所以 $k\alpha\in W$,W 是 V 的子空间.

又$\forall\ \alpha\in W,(\sigma-\lambda\iota)^n(\sigma\alpha)=\sigma((\sigma-\lambda\iota)^n\alpha)=\sigma(0)=0$,所以 $\sigma\alpha\in W$,W 是 V 的 σ-子空间.

不变子空间是一个重要的概念,因为 V 的线性变换在它上面能诱导出一个线性变换,处理某些证明题时,利用这一点会使问题简化. 它的重要意义还表现在简化线性变换的矩阵上.

例14 复数域上 n 阶矩阵 A,B,C,若 $AB-BA=C$,C 与 A,B 可换,证明 C 的特征根全为0.

分析 为了证明结论,可以利用矩阵与线性变换间的对应关系把问题转到线性变换然后加以解决.

证明 取复数域上线性空间 V 的一个基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$. 设线性变换 σ,τ,μ 在此基下的矩阵分别为 A,B,C,则有 $\sigma\tau-\tau\sigma=\mu$,且 μ 与 σ,τ 可换.

设 λ 是 μ 的特征根,V_λ 是 μ 的属于 λ 的特征子空间,则 V_λ 是 μ-子空间,且 $\mu_0=\mu|_{V_\lambda}=\lambda\iota$ 是 V_λ 的线性变换,它在 V_λ 的基 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 下的矩阵为 λE_s.

$\forall\ \alpha\in V_\lambda,\mu\alpha=\lambda\alpha$,所以 $\mu(\sigma\alpha)=\sigma(\mu\alpha)=\lambda\sigma(\alpha)$,即 $\sigma\alpha\in V_\lambda$,故 V_λ 也是 σ-子空间,同理可证 V_λ 是 τ-子空间. 令 $\sigma|_{V_\lambda}=\sigma_0,\tau|_{V_{\lambda_0}}=\tau_0$,则 σ_0,τ_0是 V_λ 的线性变换,且 $\sigma_0\tau_0-\tau_0\sigma_0=\mu_0$. 设 σ_0,τ_0在基 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 下的矩阵分别为 A_0,B_0则 $A_0B_0-B_0A_0=\lambda E_s$,从而 $s\lambda=\mathrm{Tr}(\lambda E_s)=\mathrm{Tr}(A_0B_0-B_0A_0)=0,s\neq0$,所以 $\lambda=0$. 而在复数域内线性变换与所对应的矩阵的特征根是一致的,所以 C 的特征根全为0.

例15 设 V 是复数域上的 n 维线性空间,σ 是 V 的线性变换,σ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$V_i=L(\alpha_{n-i+1},\alpha_{n-i+2},\cdots,\alpha_n)\quad i=1,2,\cdots,n$

证明:(1)V_i 是 σ-子空间.

(2)$(\sigma-\lambda\iota)^i\alpha=0$的充要条件是 $\alpha\in V_i$,其中 $\alpha\in V$.

(3)σ 的任一个 m 维不变子空间 $W\supseteq V_m$,$1\leqslant m\leqslant n$.

(4)σ 除 V_i 之外没有其它非零不变子空间.

分析 为了证明 V_i 是 σ-子空间,只须证明 V_i 的生成元 $\alpha_{n-i+1},\cdots,\alpha_n$ 在$(\sigma-\lambda\iota)$之下的象在 V_i 中.

为了证明 $W\supseteq V_m=L(\alpha_{n-m+1},\cdots,\alpha_n)$,只须证 $\alpha_{n-m+1},\cdots,\alpha_n\in W$.

证明 (1)由已知 $\sigma\alpha_1=\lambda\alpha_1+\alpha_2,\sigma\alpha_2=\lambda\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\sigma\alpha_{n-1}=\lambda\alpha_{n-1}+\alpha_n,\sigma\alpha_n=\lambda\alpha_n$,即$(\sigma-\lambda\iota)\alpha_i=\alpha_{i+1},i=1,2,\cdots,n-1,(\sigma-\lambda\iota)\alpha_n=0$,所以$(\sigma-\lambda\iota)\alpha_{n-i+k}\in V_i,k=1,2,\cdots,i$,故 V_i 是$(\sigma-\lambda\iota)$-子空间.于是$\forall\ \alpha\in V_i$,因$(\sigma-\lambda\iota)\alpha\in V_i$,即 $\sigma\alpha-\lambda\alpha\in V_i$ 且 $\lambda\alpha\in V_i$ 所以 $\sigma\alpha\in V_i$,V_i 是 σ-子空间.

(2)**充分性** 设 $\alpha\in V_i$,则 $\alpha=\sum\limits_{k=n-i+1}^{n}t_k\alpha_k$,

$$(\sigma-\lambda\iota)^i\alpha=(\sigma-\lambda\iota)^i(\sum_{k=n-i+1}^{n}t_k\alpha_k)=\sum_{k=n-i+1}^{n}t_k[(\sigma-\lambda\iota)^i\alpha_k]=0$$

必要性 设 $\alpha=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k\alpha_k$,则

$$(\sigma-\lambda\iota)^i\alpha=(\sigma-\lambda\iota)^i(\sum_{k=1}^{n}t_k\alpha_k)=\sum_{k=1}^{n}t_k[(\sigma-\lambda\iota)^i\alpha_k]$$

$$=\sum_{k=1}^{n-i}t_k\alpha_{k+i}=0$$

所以，$t_k=0, k=1,2,\cdots,n-i$，故

$$\alpha=\sum_{k=n-i+1}^{n}t_k\alpha_k=t_{n-i+1}\alpha_{n-i+1}+\cdots+t_n\alpha_n\in V_i$$

(3)因 $L(\alpha_{n-m+2},\cdots,\alpha_n)\neq W$，而 $\dim W=m$，$\dim L(\alpha_{n-m+2},\cdots,\alpha_n)=m-1$，所以必存在$\beta\in W$，$\beta\overline{\in}L(\alpha_{n-m+2},\cdots,\alpha_n)$因此$\beta=\sum_{k=1}^{n}t_k\alpha_k$中至少有一个$t_j\neq 0$，$1\leqslant j\leqslant n-m+1$，设$t_1,\cdots,t_{n-m+1}$中非零的下标最小者是$t_s$，即$t_s\neq 0$，而$t_k=0$，$1\leqslant k<s\leqslant n-m+1$，则$\beta=\sum_{k=s}^{n}t_k\alpha_k$，因$\sigma\beta\in W$即$(\sigma-\lambda\iota)\beta\in W$，所以$(\sigma-\lambda\iota)^{n-s}\beta\in W$，即

$(\sigma-\lambda\iota)^{n-s}(\sum_{k=s}^{n}t_k\alpha_k)=t_s\alpha_n\in W$. 从而 $\alpha_n\in W$.

$$(\sigma-\lambda\iota)^{n-s-1}\beta=t_s\alpha_{n-1}+t_{s+1}\alpha_n\in W$$

所以 $\alpha_{n-1}\in W$.

$$(\sigma-\lambda\iota)^{n-s-2}\beta=t_s\alpha_{n-2}+t_{s+1}\alpha_{n-1}+t_{s+2}\alpha_n\in W$$

所以 $\alpha_{n-2}\in W$，这样继续做下去，最后

$$(\sigma-\lambda\iota)^{n-s-(m-1)}\beta=t_s\alpha_{n-(m-1)}+t_{s+1}\alpha_{n-(m-2)}+\cdots+t_{s+(m-1)}\alpha_n\in W.$$

所以 $\alpha_{n-(m-1)}\in W$. 故 $L(\alpha_{n-m+1},\cdots,\alpha_n)=V_m\subseteq W$.

(4)若 W 是 V 的 m 维不变子空间，则 $W\supseteq V_m$，又 $\dim W=\dim V_m=m$，所以 $W=V_m$，因而 V 没有其它的非零不变子空间.

五、线性变换的对角化

例16 σ 是复数域上线性空间 V 的线性变换，它在一个基下的矩阵分别为

$$(1)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad (2)\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$$

判断上述线性变换可否对角化？

解 (1)首先求出 σ 的特征根. 由于在复数域内 σ 与其对应的矩阵的特征根一致，只须求它的矩阵的特征根. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得 $\lambda_1=1$(二重根),$\lambda_2=-1$.

其次,解齐次线性方程组

$$(\lambda E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0 \tag{1}$$

以确定 V_{λ_1},V_{λ_2}的维数. 由于(1)的系数矩阵在 $\lambda=1$时的秩为1,故解空间维数即 V_{λ_1}的维数为3-1=2且由(1)得属于特征根1的线性无关的特征向量为 $\xi_1=\varepsilon_1+\varepsilon_3$,$\xi_2=\varepsilon_2$;而在 $\lambda=-1$时解空间维数即 V_{λ_2}的维数为1且属于特征根-1的线性无关的特征向量为 $\xi_3=\varepsilon_1-\varepsilon_3$,所以 $\dim V_{\lambda_1}=2=\lambda_1$的重数;$\dim V_{\lambda_2}=1=\lambda_2$的重数. 由 σ 可以对角化的充分必要条件知 σ 可以对角化,σ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3下的矩阵为对角形,且

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)首先求出 σ 的特征根 $\lambda_1=1$(二重),$\lambda_2=-2$. 由于对于特征根 λ_1的特征子空间 V_{λ_1}维数即 $\lambda_1 E-A$ 的秩为1,小于 λ_1的重数,故 σ 不能对角化.

一般而言,判断数域 P 上线性空间 V 的线性变换 σ 可否对角化的步骤是:

(1)取 V 的一个基,计算 σ 关于此基的矩阵 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)=|\lambda E-A|$.

(2)求出 $f_A(\lambda)$的根 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，如某个 $\lambda_k\overline{\in}P$，则 σ 不可对角化.

(3)若 $\lambda_i\in P$，则 λ_i 均为 σ 的特征根，确定$(\lambda_iE-A)X=0$的解空间的维数即特征子空间 V_{λ_i}的维数.

(4)如 $\dim V_\lambda$ 与 λ 的重数相等，则 σ 可以对角化，否则不可对角化.

例17 设 σ_1,σ_2为 n 维线性空间 V 的两个线性变换，且 σ_1有 n 个不同的特征根，$\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$，试证：$V$ 有以 σ_2的特征向量构成的基，且 σ_1的特征向量也是 σ_2的特征向量.

分析 若能说明 V 有一个基恰为 σ_2的特征向量，则结论的前半部分得以证明.

结论的后半部分只要证明：任取 σ_1的特征向量 α，有 $\sigma_2\alpha=\mu\alpha$ 即可.

证明 因 σ_1有 n 个互异的特征根，故 σ_1可以对角化，即存在 V 的一个基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，使 σ_1在此基下的矩阵 A 为对角形，设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

设 σ_2在此基下的矩阵为 B，由 $\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$，知 $AB=BA$，于是 B 也是对角阵，设

$$B=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}$$

则 $\sigma_2(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)B$，即 $\sigma_2\varepsilon_i=\mu_i\varepsilon_i,i=1,2,\cdots,n$. 故 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 σ_2的特征向量，构成 V 的一个基.

又 $V=V_{\lambda_1}\dotplus\cdots\dotplus V_{\lambda_n}$，$V_{\lambda_i}$是 σ_1的属于 λ_i 的特征子空间，均为一

维子空间. 设 α 是 σ_1的特征向量,令 α 属于特征根 λ_t,则 $\alpha\in V_{\lambda_t}$于是有

$$\sigma_1(\sigma_2\alpha)=\sigma_2(\sigma_1\alpha)=\sigma_2(\lambda_t\alpha)=\lambda_t(\sigma_2\alpha)$$

所以 $\sigma_2\alpha\in V_{\lambda_t}$,但 $V_{\lambda_t}=L(\alpha)$,故 $\sigma_2\alpha=\mu\alpha$,μ 是 σ_2的特征根,α 是 σ_2的属于 μ 的特征向量,于是 σ_1的特征向量也是 σ_2的特征向量.

§2 正交变换与对称变换

基本概念与结论

一、正交变换及其性质

1. 欧氏空间 V 的线性变换 σ 称为**正交变换**,如果它保持向量的内积不变,即$\forall\ \alpha,\beta\in V$ 有$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta)$.

2.若σ是n维欧氏空间 V 的一个线性变换,则以下命题等价:

(1)σ 是正交变换.

(2)σ 保持向量的长度不变,即$\forall\ \alpha\in V$,有$|\sigma\alpha|=|\alpha|$.

(3)σ 把 V 的一个标准正交基映射成一个标准正交基.

(4)σ 不改变二向量间的距离,即$\forall\ \alpha,\beta\in V$,

$$|\sigma\alpha-\sigma\beta|=|\alpha-\beta|.$$

(5)在一个标准正交基下,σ 的矩阵为正交矩阵.

3. 若 σ 在标准正交基下的正交矩阵 A 的行列式$|A|=1$,则称 σ 为**第一类正交变换**(或**旋转**);若$|A|=-1$,称 σ 为**第二类正交变换**,第二类正交变换以-1为其一个特征根.

二、正交矩阵的若干性质

关于正交阵的性质前面已有所提及,这里,将集中地列举如下有关性质.

1. 设 $A=(a_{ij})$是 n 阶实矩阵,则下述命题等价:

(1)A 是正交矩阵.

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1 & 当\ i=j \\ 0 & 当\ i\neq j\end{cases}$ 或 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}1 & 当\ i=j \\ 0 & 当\ i\neq j\end{cases}$

(3) $A'A=E$.

(4) A 的行(列)向量组是 R^n 的一个标准正交基.

(5) A 是从欧氏空间的标准正交基到标准正交基的过渡矩阵.

2. 正交矩阵的行列式为 ± 1.

3. 正交矩阵可逆,且其逆仍为正交矩阵.

4. 两个正交矩阵之积仍为正交矩阵.

5. 正交矩阵的特征根的模为1.

三、对称变换及其性质

1. 欧氏空间 V 的线性变换 σ 称为**对称变换**,如果 $\forall\ \alpha,\beta\in V$ 有 $(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))$.

2. σ 是 n 维欧氏空间的线性变换,则以下命题等价:

(1) σ 是对称变换.

(2) σ 在一个标准正交基下的矩阵是实对称矩阵.

(3) σ 有 n 个两两正交的特征向量.

3. 实对称阵的属于不同特征根的特征向量正交.

应用举例

例1 设 σ 是欧氏空间 V 的一个变换,证明,如果 σ 保持内积不变,那末它一定是线性的,因而它是正交变换.

分析 按定义,如果 σ 是保持内积不变的线性变换,那末 σ 是正交变换.因而只须证 σ 是线性变换.

证明 $\forall\ \alpha,\beta\in V,k\in R$

$$(\sigma(\alpha+\beta)-\sigma\alpha-\sigma\beta,\sigma(\alpha+\beta)-\sigma\alpha-\sigma\beta)$$

$$=(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta))-(\sigma(\alpha+\beta),\sigma\alpha)-(\sigma(\alpha+\beta),\sigma\beta)$$
$$-(\sigma\alpha,\sigma(\alpha+\beta))+(\sigma\alpha,\sigma\alpha)+(\sigma\alpha,\sigma\beta)-(\sigma\beta,\sigma(\alpha+\beta))+$$
$$(\sigma\beta,\sigma\alpha)+(\sigma\beta,\sigma\beta)=0$$

所以，$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma\alpha+\sigma\beta$. 同样可得 $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$. 故 σ 是 V 的保持内积不变的线性变换. 从而 σ 是 V 的一个正交变换.

例2 在 $n(n>2)$ 维欧氏空间 V 中，S 是向量集合，其中有 $n-1$ 个线性无关的向量，又设非零向量 α 与 S 中每一向量正交. 若 V 上的线性变换 σ 把 S 的每一个向量 β 变成 β，而把 α 变成 $-\alpha$，试证 σ 是正交变换.

分析 由正交变换的等价命题，只须证 σ 把 V 的标准正交基变成标准正交基. 为此从 S 的 $n-1$ 个线性无关的向量来构造 V 的标准正交基.

证明 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 是 S 的 $n-1$ 个线性无关的向量，令 $M=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$，则 M 是 V 的 $n-1$ 维子空间且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 是 M 的一个基. 经正交化可得 M 的一个标准正交基 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-1}$. 此基可扩充为 V 的标准正交基，因 α 与 M 正交，所以 α 与 $\eta_i(i=1,\cdots,n-1)$ 正交，将 α 单位化得 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$，则 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-1},\frac{\alpha}{|\alpha|}=\eta_n$ 及 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-1},-\eta_n$ 是 V 的两个标准正交基. 由题设，$\sigma(\eta_1)=\eta_1,\cdots,\sigma(\eta_{n-1})=\eta_{n-1},\sigma(\eta_n)=-\eta_n$，即 σ 将 V 的标准正交基变成标准正交基，故 σ 是正交变换.

例3 若 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个反对称变换（即满足条件：$\forall\ \alpha,\beta\in V$ 有 $(\sigma\alpha,\beta)=-(\alpha,\sigma\beta)$ 的线性变换）则 $(\iota-\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}$ 是 V 的一个正交变换，而且是一个旋转.

分析 为证明 $(\iota-\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}$ 是正交变换，可证它在 V 的一个标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

证明 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基，且 σ 在此基下的矩阵是 $A=(a_{ij})$，则 $a_{ij}=(\varepsilon_i,\sigma(\varepsilon_j))=-(\sigma(\varepsilon_i),\varepsilon_j)=-(\varepsilon_j,\sigma(\varepsilon_i))=-a_{ji}$，故 A 是实反对称矩阵，于是 -1 不是 A 的特征根（第四章例3），从而 $(E+A)^{-1}$ 有意义. 由于 $(\iota-\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}$ 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 之下的矩阵是 $(E-A)(E+A)^{-1}$，而

$$[(E-A)(E+A)^{-1}]'[(E-A)(E+A)^{-1}]$$
$$=[(E+A)^{-1}]'(E-A)'(E-A)(E+A)^{-1}$$
$$=[(E+A)']^{-1}(E+A)(E-A)(E+A)^{-1}$$
$$=(E-A)^{-1}(E-A)(E+A)(E+A)^{-1}=E$$

所以$(E-A)(E+A)^{-1}$是正交矩阵，故$(\iota-\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}$是正交变换.

又因为

$$(\iota-\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}+\iota$$
$$=(\iota-\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}+(\iota+\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}=2\iota(\iota+\sigma)^{-1}$$

所以对 V 中任意非零向量 α，有$[(\iota-\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}+\iota](\alpha)=2\iota(\iota+\sigma)^{-1}(\alpha)\neq 0$，因此$(\iota-\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}(\alpha)\neq-\alpha$，这说明$-1$不是正交变换$(\iota-\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}$的特征根，从而$(\iota-\sigma)(\iota+\sigma)^{-1}$是一个旋转.

例4 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基，σ 在此基下的矩阵为 A，基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵为 G，证明：σ 为对称变换当且仅当 $A'G=GA$.

证明 设 $\alpha,\beta\in V$，则

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\beta=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

令

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

则

$$(\sigma\alpha,\beta)=(AX,Y)=(AX)'GY=X'A'GY$$
$$(\alpha,\sigma\beta)=X'GAY$$

所以 σ 是对称变换当且仅当 $X'A'GY=X'GAY$，即 $A'G=GA$.

例5 设 σ 是 n 维欧氏空间的一个线性变换，证明：σ 为对称变换当且仅当 σ 有 n 个两两正交的特征向量.

分析 充分性的证明只须找到 V 的一个标准正交基，使 σ 在此基下的矩阵是实对称阵.

必要性的证明只须找到 V 的由 σ 的 n 个特征向量构成的标准正交基.

证明 充分性 由已知有 n 个两两正交的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则 $\sigma(\alpha_i)=\lambda_i\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$. 令 $\eta_i=\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$,则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一个标准正交基. 由

$$\sigma(\eta_i)=\sigma(\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|})=\frac{1}{|\alpha_i|}\sigma(\alpha_i)=\frac{\lambda_i\alpha_i}{|\alpha_i|}=\lambda_i\eta_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

所以 σ 在 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 之下的矩阵是实对称阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

从而 σ 是对称变换.

必要性 设 σ 是对称变换,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是欧氏空间的一个标准正交基,σ 在此基下的矩阵为 A,则必有正交矩阵 Q,使 $Q^{-1}AQ$ 为对角形,设

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是 A 的特征根. 令$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Q$,则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是标准正交基,且

$$\begin{aligned}\sigma(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)&=\sigma[(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Q]=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Q\\ &=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)AQ=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n)Q^{-1}AQ\\ &=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以，$\sigma(\eta_i)=\lambda_i\eta_i, i=1,2,\cdots,n$，即 η_i 是 σ 的 n 个两两正交的特征向量.

例6 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是欧氏空间 V 的两个标准正交基. 若 V 的一个正交变换 σ，使 $\sigma(\alpha_1)=\beta_1$，则 $L(\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n)=L(\beta_2,\cdots,\beta_n)$.

分析 由于 $L(\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n)$ 与 $L(\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 的维数都是 $n-1$，欲证它们相等只须证它们之间存在包含关系即可.

证明 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个标准正交基，σ 是正交变换，故 $\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n$ 也是 V 的一个标准正交基. 假设从标准正交基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到标准正交基 $\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n$ 的过渡矩阵是 T，则 $(\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)T$，$T=(t_{ij})$ 是正交矩阵. 因 $\sigma\alpha_1=\beta_1$，所以 $t_{11}=1, t_{i1}=0(i=2,\cdots,n)$. 由 T 是正交矩阵知 $1+t_{12}^2+\cdots+t_{1n}^2=1$，故 $t_{1j}=0(j=2,\cdots,n)$，因此

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

从而 $\sigma\alpha_j=t_{2j}\beta_2+\cdots+t_{nj}\beta_n \quad (j=2,\cdots,n)$，故 $L(\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n)\subseteq L(\beta_2,\cdots,\beta_n)$，又 $\dim L(\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n)=\dim L(\beta_2,\cdots,\beta_n)$，所以 $L(\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n)=L(\beta_2,\cdots,\beta_n)$.

* § 3 线性映射空间

一、线性映射的定义及基本性质

定义1 设 V,V' 是数域 P 上两个线性空间，若映射：$V\longrightarrow V'$ 满足条件

$$\sigma(a\alpha+b\beta)=a\sigma\alpha+b\sigma\beta$$

其中 $a,b\in P,\alpha,\beta\in V$，称 σ 是 V 到 V' 的一个**线性映射**.

当 $V=V'$ 时，σ 是 V 的线性变换．当 $V'=P$ 时称 σ 是 V 上的一个**线性函数**（或**线性泛函**）．

与线性变换类似，由定义容易得到线性映射的下述简单性质：

(1) $\sigma(0)=0$.

(2) σ 将 V 的线性相关的向量组变为 V' 的线性相关的向量组．

(3) 若 V_1 是 V 的子空间，则 $\sigma V_1=\{\sigma\alpha|\alpha\in V_1\}$ 是 V' 的子空间，特别地，σV 称为 V 的**值域**，记为 $\mathrm{Im}(\sigma)$，即

$$\mathrm{Im}(\sigma)=\sigma V=\{\sigma\alpha|\alpha\in V\}$$

(4) 若 V'_1 是 V' 的子空间，则 $\{\xi\in V|\sigma\xi\in V'_1\}$ 是 V 的子空间，特别地，V' 的零子空间在 σ 作用下的原象的集合称为 σ 的**核**，记为 $\mathrm{Ker}(\sigma)$，即

$$\mathrm{Ker}(\sigma)=\{\alpha\in V|\sigma\alpha=0\}$$

(5) σ 是满射当且仅当 $\mathrm{Im}(\sigma)=V'$；σ 是单射当且仅当 $\mathrm{Ker}(\sigma)=\{0\}$.

(6) 当 V 是数域 P 上的 n 维线性空间时，有维数公式：

$$\dim\mathrm{Im}(\sigma)+\dim\mathrm{Ker}(\sigma)=n$$

二、线性映射的矩阵

定义2 设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 V' 的一个线性映射，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 分别是 V 和 V' 的基，且

$$\sigma(\varepsilon_1)=a_{11}\eta_1+a_{21}\eta_a+\cdots+a_{m1}\eta_m$$
$$\sigma(\varepsilon_2)=a_{12}\eta_1+a_{22}\eta_2+\cdots+a_{m2}\eta_m$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma(\varepsilon_n)=a_{1n}\eta_1+a_{2n}\eta_2+\cdots+a_{mn}\eta_m$$

用矩阵乘法表示为

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)A$$

其中 $A=(a_{ij})_{mn}\in P^{m\times n}$，称 A 为**线性映射** σ **关于基** $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ **和** $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ **的矩阵**.

定理1 在 V,V' 的给定基下,线性映射对应其矩阵的映射为双射.

证明 由定义2在 V,V' 的给定基下,线性映射有唯一确定的矩阵与之对应. 反之,$\forall\ A=(a_{ij})\in P^{m\times n}$,$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$,规定 $\sigma(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ji}x_j\eta_j$,则 σ 是 V 到 V' 的一个线性映射,它关于给定基的矩阵是 A. 易证这个映射也是单射.

设 V、V' 分别为数域 P 上的 n 维、m 维线性空间. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 是 V 的基,前者到后者的过渡矩阵为 Q;$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 及 $\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m'$ 是 V' 的基,前者到后者的过渡矩阵为 S^{-1},σ 是 V 到 V' 的线性映射,且

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)A$$
$$\sigma(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')B$$

则

$$\begin{aligned}\sigma(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')&=\sigma((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Q)=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Q\\&=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)AQ=(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')SAQ\end{aligned}$$

因此 $B=SAQ$.

这说明,同一个线性映射关于两对基的矩阵是等价的.

定理2 $A,B\in P^{m\times n}$,A,B 等价当且仅当它们是同一个线性映射关于不同的两对基的矩阵.

证明 由前述知,若A,B是同一个线性映射关于两对基的矩阵,则A,B等价. 反之,若m行n列矩阵A,B等价,即存在m阶可逆矩阵S及n阶可逆矩阵Q使$B=SAQ$. 假设V,V'分别是数域P上n维,m维线性空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$和$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$分别是$V$和$V'$的基. 令$(\varepsilon_1',\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Q$,$(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)S^{-1}$,则 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 和 $\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m'$ 也分别是 V 和 V' 的基. 若 σ 关于原先的一对基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_m$ 的矩阵是 A,则容

易知道 σ 关于一对新基 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 和 $\eta_1',\cdots,\eta_m'$ 的矩阵为 $SAQ=B$. 这就是说,$A,B\in P^{m\times n}$;A,B 等价当且仅当它们是同一个线性映射关于不同的两对基的矩阵.

例1 令线性映射 $\sigma: R^4\longrightarrow R^2$, $\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4)=3(x_1-2x_2-x_3-4x_4, x_1+x_2-2x_3-3x_4)$.

(1)求 σ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4;\varepsilon_1',\varepsilon_2'$的矩阵,其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$是 R^4的标准基;$\varepsilon_1',\varepsilon_2'$是 R^2的标准基.

(2)求 σ 关于基 $e_1,e_2,e_3,e_4;e_1',e_2'$的矩阵,其中 $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,1,1,0)$, $e_3=(1,1,0,0)$, $e_4=(1,0,0,0)$; $e_1'=(1,1)$, $e_2'=(2,1)$.

(3)求 $\mathrm{Ker}(\sigma)$.

解 (1)因为

$$\sigma(\varepsilon_1)=\sigma(1,0,0,0)=(3,1)=3\varepsilon_1'+\varepsilon_2'$$
$$\sigma(\varepsilon_2)=\sigma(0,1,0,0)=(-2,1)=-2\varepsilon_1'+\varepsilon_2'$$
$$\sigma(\varepsilon_3)=\sigma(0,0,1,0)=(-1,-2)=-\varepsilon_1'-2\varepsilon_2'$$
$$\sigma(\varepsilon_4)=\sigma(0,0,0,1)=(-4,-3)=-4\varepsilon_1'-3\varepsilon_2'$$

所以,σ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4;\varepsilon_1',\varepsilon_2'$的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & -1 & -4\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

(2)σ 关于基 $e_1,e_2,e_3,e_4;e_1',e_2'$的矩阵为

$$B=S^{-1}AQ$$

其中 S 是 $\varepsilon_1',\varepsilon_2'$到 e_1',e_2'的过渡矩阵,且等于$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$,

Q 是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$,到 e_1,e_2,e_3,e_4的过渡矩阵,且等于

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是 $$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & -2 & -1 & -4\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

(3) $\mathrm{Ker}(\sigma)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4 \mid \sigma(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0)\}$，$\forall\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in \mathrm{Ker}(\sigma)$，有

$$\begin{cases}3x_1-2x_2-x_3-4x_4=0\\ x_1+x_2-2x_3-3x_4=0\end{cases}$$

这个齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_1=(1,1,1,0)$，$\alpha_2=(2,1,0,1)$，所以 $\mathrm{Ker}(\sigma)=L(\alpha_1,\alpha_2)$.

三、线性映射空间 $\mathrm{Hom}_P(V,V')$

我们引进符号 $\mathrm{Hom}_P(V,V')$，它表示数域 P 上线性空间 V 到 V' 的所有线性映射作成的集合，我们在 $\mathrm{Hom}_p(V,V')$ 中定义下列两种运算：

$\sigma+\tau:(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma\alpha+\tau\alpha$

$k\sigma:(k\sigma)(\alpha)=k\sigma\alpha$

其中 $\sigma,\tau\in \mathrm{Hom}_p(V,V')$，$k\in P$，$\alpha\in V$. 容易验证 $\sigma+\tau$，$k\sigma\in \mathrm{Hom}_p(V,V')$ 且 $\mathrm{Hom}_p(V,V')$ 关于上面定义的加法，数乘作成数域 P 上的一个线性空间. 在这个空间中，零映射 $0:\alpha\longmapsto 0\ (\alpha\in V)$，起着零向量的作用.

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 是 V' 的基，取 $\sigma\in \mathrm{Hom}_p(V,V')$ 且 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)A$，$A\in P^{m\times n}$，规定 $\varphi:\sigma\longmapsto A$，易知 φ 是 P 上线性空间 $\mathrm{Hom}_p(V,V')$ 到 $P^{m\times n}$ 的同构映射，因而

$$\dim \mathrm{Hom}_p(V,V')=\dim P^{m\times n}=m\times n$$

于是有下面的定理.

定理3 $\mathrm{Hom}_P(V,V')$是数域 P 上的 $m\times n$ 维线性空间. 其中 m, n 分别为 V,V' 在 P 上的维数.

四、对偶空间 $\mathrm{Hom}_P(V,P)$

在 $\mathrm{Hom}_P(V,V')$中取 $V'=P$ 得 $\mathrm{Hom}_P(V,P)$，它表示 V 上全体线性函数所作成的线性空间，通常记为 V^*，称为 V 的**对偶空间或共轭空间**，由定理3知它的维数是 n.

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基，$\forall\ a_i\in P$，令

$$\sigma_i(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n)=a_i\quad i=1,2,\cdots,n$$

我们可以证明 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 是 V^* 的一个基. 首先令

$$k_1\sigma_1+k_2\sigma_2+\cdots+k_n\sigma_n=0,k_i\in P(i=1,2,\cdots,n)$$

则 $$(k_1\sigma_1+k_2\sigma_2+\cdots+k_n\sigma_n)(\varepsilon_i)=0(i=1,2,\cdots,n)$$

即 $k_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 线性无关. 其次，$\forall\ \sigma\in V^*$，设 $\sigma(\varepsilon_1)=b_1,\sigma(\varepsilon_2)=b_2,\cdots,\sigma(\varepsilon_n)=b_n$，作 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 的线性组合

$$\tau=b_1\sigma_1+b_2\sigma_2+\cdots+b_n\sigma_n$$

则 $\tau\in V^*$，且

$$\tau(\varepsilon_i)=(b_1\sigma_1+b_2\sigma_2+\cdots+b_n\sigma_n)(\varepsilon_i)=b_i(i=1,2,\cdots,n)$$

所以 $\tau=\sigma$，即 σ 能用 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 线性表示. 因而 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 构成 V^* 的一个基.

定义3 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是数域 P 上线性空间 V 的一个基，则满足条件

$$\sigma_i(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n)=a_i,i=1,2,\cdots,n,a_i\in P$$

的线性映射 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 是 V^* 的一个基，称为 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的**对偶基**.

由于 V,V^* 的维数相同，因而 V 与 V^* 同构，并且 $a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n\longmapsto a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+\cdots+a_n\sigma_n$ 是它们之间的同构映射.

关于线性空间 V 的基变换与 V 的对偶空间 V^* 的相应的对偶基变换有如下关系：

定理4 设线性空间 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为 X，则 V^* 中相应的对偶基 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 到 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 的过渡矩阵为 $(X')^{-1}$.

证明 设 $X=(x_{ij})_{n\times n}$，则

$$\eta_j=x_{1j}\varepsilon_1+x_{2j}\varepsilon_2+\cdots+x_{nj}\varepsilon_n,\ j=1,2,\cdots,n$$

在 V^* 中，设由基 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 到 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 的过渡矩阵为 $Y=(y_{ij})_{n\times n}$，即

$$(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)Y$$

所以
$$\begin{aligned}\tau_i(\eta_j)&=(y_{1i}\sigma_1+\cdots+y_{ni}\sigma_n)(\eta_j)\\&=y_{1i}\sigma_1(\eta_j)+\cdots+y_{ni}\sigma_n(\eta_j)\\&=y_{1i}\sigma_1(x_{1j}\varepsilon_1+\cdots+x_{nj}\varepsilon_n)+\cdots+y_{ni}\sigma_n(x_{1j}\varepsilon_1+\cdots+x_{nj}\varepsilon_n)\\&=y_{1i}x_{1j}+\cdots+y_{ni}x_{nj}\end{aligned}$$

而
$$\tau_i(\eta_j)=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

所以 $Y'X=E$，从而 $Y=(X^{-1})'=(X')^{-1}$.

定理5 设 V 是数域 P 上的线性空间，若 $\sigma\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$，规定 $\sigma^*:V^*\longrightarrow V^*$ 使得 $\sigma^*(f)(\alpha)=f(\sigma(\alpha))$，$\forall\ f\in V^*,\alpha\in V$，则 σ^* 是 V^* 的一个线性变换.

证明 首先，$\forall\ \alpha,\beta\in V,a,b\in P$，因为

$$\begin{aligned}\sigma^*(f)(a\alpha+b\beta)&=f(\sigma(a\alpha+b\beta))=f(a\sigma\alpha+b\sigma\beta)\\&=af(\sigma\alpha)+bf(\sigma\beta)=a\sigma^*(f)(\alpha)+b\sigma^*(f)(\beta)\end{aligned}$$

所以，$\sigma^*(f)\in V^*$.

其次 $\forall\ f,g\in V^*,k_1,k_2\in P,\alpha\in V$.

$$\begin{aligned}&(\sigma^*(k_1f+k_2g))(\alpha)\\&=(k_1f+k_2g)(\sigma\alpha)=k_1f(\sigma\alpha)+k_2g(\sigma\alpha)\\&=k_1\sigma^*(f)(\alpha)+k_2\sigma^*(g)(\alpha)=(k_1\sigma^*(f)+k_2\sigma^*(g))(\alpha)\end{aligned}$$

所以 $\sigma^*(k_1f+k_2g)=k_1\sigma^*(f)+k_2\sigma^*(g)$

从而 $\sigma^*\in \mathrm{Hom}_P(V^*,V^*)$.

定义4 σ^*称为σ的**对偶变换**.

σ与σ^*的矩阵之间有如下关系：

定理6 设σ是n维线性空间V的一个线性变换，它在V的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵是$A$，则$\sigma^*$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的对偶基下的矩阵是$A'$.

证明 由已知$\sigma(\varepsilon_j)=a_{1j}\varepsilon_1+\cdots+a_{nj}\varepsilon_n$，$j=1,2,\cdots,n$，设$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$是$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的对偶基，则

$$
\begin{aligned}
(\sigma^*\sigma_i)(\varepsilon_j)&=\sigma_i(\sigma\varepsilon_j)=\sigma_i(a_{1j}\varepsilon_1+\cdots+a_{nj}\varepsilon_n)\\
&=(a_{i1}\sigma_1+\cdots+a_{ij}\sigma_j+\cdots+a_{in}\sigma_n)(\varepsilon_j)
\end{aligned}
$$

所以$\sigma^*\sigma_i=a_{i1}\sigma_1+\cdots+a_{in}\sigma_n$　$i=1,2,\cdots,n$. 故σ^*在$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$之下的矩阵为

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\
a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}=A'
$$

例2 求$P^{2\times2}$的基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$的对偶基.

解 设$E_{11},E_{12},E_{21}E_{22}$的对偶基为$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$，则任取

$$
X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\in P^{2\times2}
$$

有

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(X)&=\sigma_1(x_{11}E_{11}+x_{12}E_{12}+x_{21}E_{21}+x_{22}E_{22})=x_{11}\\
\sigma_2(X)&=\sigma_2(x_{11}E_{11}+x_{12}E_{12}+x_{21}E_{21}+x_{22}E_{22})=x_{12}\\
\sigma_3(X)&=\sigma_3(x_{11}E_{11}+x_{12}E_{12}+x_{21}E_{21}+x_{22}E_{22})=x_{21}\\
\sigma_4(X)&=\sigma_4(x_{11}E_{11}+x_{12}E_{12}+x_{21}E_{21}+x_{22}E_{22})=x_{22}
\end{aligned}
$$

$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$是所求的对偶基.

例3 取定$P^{2\times2}$中一个矩阵

$$
A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}
$$

设 $P^{2\times2}$的线性变换 σ 为

$$\sigma(X)=AX$$

求 σ 的对偶变换 σ^* 及 σ^* 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$的对偶基下的矩阵.

解 $V=P^{2\times2}$中取基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$,其对偶基设为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$,则对 V^* 中任一向量 $k_1\sigma_1+k_2\sigma_2+k_3\sigma_3+k_4\sigma_4$有

$$\begin{aligned}
&(\sigma^*(k_1\sigma_1+k_2\sigma_2+k_3\sigma_3+k_4\sigma_4))(X)\\
=&(k_1\sigma^*\sigma_1+k_2\sigma^*\sigma_2+k_3\sigma^*\sigma_3+k_4\sigma^*\sigma_4)(X)\\
=&k_1\sigma_1(AX)+k_2\sigma_2(AX)+k_3\sigma_3(AX)+k_4\sigma_4(AX)\\
=&k_1(ax_{11}+bx_{21})+k_2(ax_{12}+bx_{22})+k_3(cx_{11}+dx_{21})\\
&+k_4(cx_{12}+dx_{22})=k_1(a\sigma_1(X)+b\sigma_3(X))+k_2(a\sigma_2(X)\\
&+b\sigma_4(X))+k_3(c\sigma_1(X)+d\sigma_3(X))+k_4(c\sigma_2(X)+d\sigma_4(X))\\
=&[(ak_1+ck_3)\sigma_1+(ak_2+ck_4)\sigma_2+(bk_1+dk_3)\sigma_3\\
&+(bk_2+dk_4)\sigma_4](X)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sigma^*(k_1\sigma_1+k_2\sigma_2+k_3\sigma_3+k_4\sigma_4)=&(ak_1+ck_3)\sigma_1+(ak_2+ck_4)\sigma_2\\
&+(bk_1+dk_3)\sigma_3+(bk_2+dk_4)\sigma_4\end{aligned}$$

因而,σ^* 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$的对偶基 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$下的矩阵为

$$A^*=\begin{pmatrix}a&0&c&0\\0&a&0&c\\b&0&d&0\\0&b&0&d\end{pmatrix}$$

习　题

1. 在 $V=\{X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}|x_{ij}$是实数$\}$中定义变换

$$\sigma:\qquad \sigma(X)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$$

(1)验证 σ 是 V 的线性变换;

(2)求值域 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 及核 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 的维数.

2. 设 σ 是线性空间 V 的线性变换，ι 是恒等变换，且 $\sigma^2+\iota=\sigma$，证明 σ 是可逆的.

3. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是二维线性空间 V 的基，σ_1,σ_2 是 V 的两个线性变换 $\sigma_1\varepsilon_1=\beta_1$，$\sigma_1\varepsilon_2=\beta_2$；$\sigma_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\beta_1+\beta_2$，$\sigma_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\beta_1-\beta_2$. 试证 $\sigma_1=\sigma_2$.

4. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7\end{pmatrix}$$

令 $\sigma(\xi)=A\xi$，$\xi\in P^4$. 求 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 及 $\mathrm{Ker}(\sigma)$.

5. 已知线性空间 R^3 的线性变换 σ 把基 $\alpha_1=(1,0,1)$，$\alpha_2=(0,1,0)$，$\alpha_3=(0,0,1)$ 分别变成 $(1,0,2)$，$(-1,-2,-1)$，$(1,0,0)$，求 σ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的矩阵及 σ 关于标准基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的矩阵.

6. 若 R^3 中线性变换 σ 将任意向量 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)$ 变为

$$(x_1-3x_2+4x_3,4x_1-7x_2+8x_3,6x_1-7x_2+7x_3)$$

求 σ 的特征根和特征向量. 能否找到一个基，使 σ 在此基下的矩阵为对角形.

7. 在 $P^{2\times 2}$ 中已知三个基

(Ⅰ) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$；

(Ⅱ) $\beta_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；

(Ⅲ) $\gamma_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\gamma_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\gamma_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

若线性变换 σ 定义为：$\sigma(\alpha_i)=\beta_i\quad(i=1,2,3,4)$，试分别求出 σ 在基(Ⅰ)和(Ⅲ)下的矩阵 A 与 B.

8. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，问在 V 中是否有线性变换 σ,τ 使 $\sigma\tau-\tau\sigma=\iota$ 成立.

9. 设 n 阶方阵 A 有 k 个不同的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$，证明：如果 A 可以对角化，则必存在 $n\times n$ 矩阵 $E_1,\cdots,E_k$，使

(1)$E_iE_j=0\quad(i\neq j)$；

(2) $\sum_{i=1}^{k} E_i = E_n$;

(3) $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i$.

10. 设 n 维线性空间 R^n 的线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为对角形，且对角线上元素都不相同，求证 W 是 σ 的非零不变子空间，当且仅当 W 由 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ 的一个子集生成.

11. 设 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下所对应的矩阵是对角形阵，且对角线上的元素均不相同，求证：σ 的不变子空间恰有 2^n 个.

12. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，证明：σ 的秩 $=k$ 的充分必要条件是 V 中存在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_n$ 使 $\sigma\varepsilon_1, \cdots, \sigma\varepsilon_k$ 线性无关，而 $\sigma\varepsilon_{k+1} = \cdots = \sigma\varepsilon_n = 0$.

13. 设 σ 为 n 维线性空间 V 的一个线性变换，且有 V 的子空间 V_1, V_2 使

$$\sigma^{-1}(0) = V_1 \cap V_2,$$

证明 V 有线性变换 σ_1, σ_2，使 $V_i \subseteq \sigma_i^{-1}(0), i=1,2$，且 $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$.

14. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，且 σ 的值域与核重合，证明：

(1) n 是偶数，

(2) 应如何选择 V 的基，才能使 σ 在这个基下的矩阵是若当标准形，并写出这个标准形.

15. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，证明：$R(\sigma^2) = R(\sigma)$ 的充分必要条件是：

$$V = \sigma V \dotplus \sigma^{-1}(0)$$

其中 $R(\sigma)$ 表示 σ 的秩.

16. 设 A, B 是 n 阶方阵，$\lambda \neq 0$ 是 AB 和 BA 的特征根，证明：AB 和 BA 属于 λ 的两个特征子空间的维数相等.

17. σ 是数域 P 上 n 维线性空间 $V_n(P)$ 的线性变换，那么 σ 是数乘变换的充分必要条件是 $V_n(P)$ 中每个一维子空间都是 σ-子空间.

18. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基，σ 是 V 的一个线性变换，$A = (a_{ij})$ 是 σ 关于这个基的矩阵. 证明：$a_{ij} = (\sigma\alpha_i, \alpha_j), i = 1, 2, \cdots, n$.

19. 设 V 是所有实 n 阶方阵构成的实数域上的线性空间，S 是 n 阶实对称方阵. 定义 V 的线性变换如下：$\forall\ X \in V, \sigma(X) = SX + XS$，证明：存在 V 的一个

基，使 σ 在这个基下的矩阵是对角形矩阵.

20. σ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换. 若 σ 的负特征根是偶数重的. 证明：σ 存在一个平方根，即存在 V 的一个线性变换 τ，使 $\sigma=\tau^2$.

21. n 维欧氏空间 V 的变换 σ 叫做**保距变换**，如果 $|\sigma x-\sigma y|=|x-y|$，$x,y\in V$，证明：使 $\sigma 0=0$（0是零向量）的保距变换必为正交变换.

22. 设 σ,τ 是复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换，且 $\sigma+\tau+\sigma\tau=0$，试证 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

23. 假设 σ 是 n 维欧氏空间的一个线性变换，τ 是 V 的变换，且对 V 中任何向量 α,β 有

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\tau(\beta))$$

证明：(1) τ 是一个线性变换；

(2) σ 的核等于 τ 的值域的正交补.

习题答案与提示

第　一　章

1. 对 n 用数学归纳法或者设 ω 是 x^2+x+1 的根，得出 $\omega^{n+2}+(\omega+1)^{2n+1}=\omega^{n+2}(1-\omega^{3n})=0$.

2. $x^3+3x^2+3x+2=(x+2)(x^2+x+1)$. μ 就是 x^2+x+1 的根即三次单位根，代入已知条件所给的等式便得 $(x-\mu^2)\mid(x^2+x)f(x)$，又 μ^2 不是 x^2+x 的根则 $(x-\mu^2,x^2+x)=1$.

3. $x^m-1=(x-1)f(x)$，$x^n-1=(x-1)g(x)$，$(x^m-1,x^n-1)=x^d-1$，$d=(m,n)$.

4. (1) 设 $u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)=1$，则 $g(x)=r_1(x)u_2(x)f_2(x)+r_2(x)u_1(x)f_1(x)$　($g(x)$ 不唯一).

(2) $g(x)=-x^6+3x^4+x^3+2x^2+2x-1$.

5. 设 $d=(m,n)$，如果 $n/d,m/d$ 都是奇数，则 $(x^n+a^n,x^m+a^m)=x^d+a^d$；否则 $(x^n+a^n,x^m+a^m)=1$.

6. 反复应用 $(f,gh)=1\Longleftrightarrow(f,g)=1,(f,h)=1$ 以及 $(f,f+g)=1\Longleftrightarrow(f,g)=1$.

7. 在复数域上，$f(x)=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x-\omega_k)$，$\omega_k=\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$. 在实数域上，当 n 为奇数时，$f(x)=(x-\sqrt[n]{2})\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2\sqrt[n]{2}\cos\frac{2k\pi}{n}x+\sqrt[n]{4}\right)$，当 n 为偶数时

$$f(x)=(x-\sqrt[n]{2})(x+\sqrt[n]{2})\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-\sqrt[n]{2}\cos\frac{2k\pi}{n}x+\sqrt[n]{4}\right).$$

8. 若可约则有整数 p,q,r 使 $f(x)=(x+p)(x^2+qx+r)$，$f(0)=pr=d$，$bd+cd=(b+c)d$ 是奇数，则 d,p,r 都是奇数，而 $f(1)=(1+p)(1+q+r)=1+b+c+d$，即偶数等于奇数，矛盾.

9. $b^2 = \frac{-108}{3125}a^5, a \neq 0.$

10.（1）不一定，例如 $f(x) = x^4 - 1$.

（2）不一定，例如 $f(x) = x^3 + x, a = 0$ 是 $f(x)$ 与 $f''(x)$ 的根但不是 $f'''(x)$ 的根，$a = 0$ 也不是 $f(x)$ 的三重根.

11. 将 5 次单位根 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 分别代入所给多项式的等式得

$$\begin{cases} f(1) + \omega_1 g(1) + \omega_1^2 h(1) = 0 \\ f(1) + \omega_2 g(1) + \omega_2^2 h(1) = 0 \\ f(1) + \omega_3 g(1) + \omega_3^2 h(1) = 0 \\ f(1) + \omega_4 g(1) + \omega_4^2 h(1) = 0 \end{cases}$$

即知 $f(1) = 0$，则有 $x - 1 \mid f(x)$.

12. 如果有有理根 $\frac{q}{p}$，则 $p \mid a_0, q \mid a_n, p - q \mid f(1), p + q \mid f(-1)$，从而 q 与 p 均为奇数，而 $p - q$ 与 $p + q$ 均为偶数. $f(1)$ 与 $f(-1)$ 就都应是偶数，矛盾.

13. 若 $x^p - a = h(x)g(x), \partial(h(x)) = s < p, \partial(g(x)) = t < p, x^p - a$ 在复数域中的 p 个根是 $\omega^i \alpha, 1 \leqslant i \leqslant p, \alpha^p = a$. 又 $h(x)$ 的常数项是 s 个 $\omega^i \alpha$ 的乘积，设 $h(0) = \omega_1 \alpha^s, \omega_1^p = 1$. 则 $h(0)^p = (\alpha^p)^s = a^s$. 因 s, p 互素故有整数 u, v 使得 $su + pv = 1$，则 $a = a^{su+pv} = h(0)^{pu} \cdot a^{pv} = (h(0)^u a^v)^p, h(0)^u \cdot a^v$ 便是 $x^p - a$ 的一个有理根.

14. 设 a 是整数根，$f(x) = (x - a)q(x)$. 从而有 $f(m) = (m - a)q(m)$，$f(m + 1) = (m + 1 - a)q(m + 1)$. 而两个连续整数 $m - a$ 与 $m - a + 1$ 中必有一个是偶数.

15. 令 $g(x) = [x - (a + b\sqrt{d})][x - (a - b\sqrt{d})]$，设 $f(x) = g(x)q(x) + rx + s$，利用已知 $a + b\sqrt{d}$ 是 $f(x)$ 的根证明 $rx + s = 0$.

16. 若 a 是 $f(x)$ 的实根，则 $\bar{a} = a$ 也是 $\overline{f(x)}$ 的根，这与 $f(x)$ 和 $\overline{f(x)}$ 互素矛盾. 反之不一定，例如 $f(x) = x^2 + 1$ 无实根，但 $(f(x), \overline{f(x)}) = x^2 + 1$.

17. 由已知条件得 $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \mid f(x) - p$ 若有 m 使得 $f(m) = 2p$，则 $(m - 1)(m - 2)(m - 3)(m - 4) \mid p$.

18. 设 $f(x_0) = p$ 是素数，x_0 是一整数. 若对任意整数 $k, f(x_0 + kp) = p + kp\frac{f'(x_0)}{1} + \cdots + (kp)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 是素数，则由 $p \mid f(x_0 + kp)$ 得 $f(x_0 + kp) = \pm p$. 即 $2n$ 次方程 $[f(x)]^2 - p^2 = 0$ 有无穷多个根 $x_0 + kp(k = 0, \pm 1, \cdots)$，这是不可能的.

19. 若$f(x)$非常数,设a是$f(x)$的一个根,则$a,a-c,a-2c,\cdots$都是$f(x)$的根.

20. 令$g(x)=(x+1)f(x)-x$,则$0,1,\cdots,n$为$g(x)$的所有根,$(x+1)f(x)-x=cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$. 令$x=-1$得出$c=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$,$f(x)=\dfrac{1}{x+1}\left[\dfrac{(-1)^{n+1}x(x+1)\cdots(x-n)}{(n+1)!}+x\right]$,$f(n+1)=\dfrac{1}{n+2}[(-1)^{n+1}+n+1]=\begin{cases}1 & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{n}{n+2} & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

21. 设$f(x)=g(x)h(x)$,$g(x)$或$h(x)$中必有一个的次数不超过$[\frac{n}{2}]$($[\frac{n}{2}]$表示满足条件$\frac{n}{2}\leqslant[\frac{n}{2}]\leqslant\frac{n}{2}+1$的整数),若$\partial(g(x))\leqslant[\frac{n}{2}]$,则又因$g(x)$在多于$n$个$x$的整数值处取1或$-1$,$g(x)$就在多于$[\frac{n}{2}]$个$x$的整数值处取1(或$-1$),即知$g(x)$是常数.

22. 若$f(x)=g(x)h(x)$,因$f(a_i)=1$,所以$g(a_i)=h(a_i)=\pm 1,i=1,2,\cdots n$. 若$g(x)$与$h(x)$都非常数,则$g(x)=h(x)$,$f(x)=[g(x)]^2$,与$f(x)$的次数是奇数矛盾.

第　二　章

1. (1)12,　(2)$\dfrac{n(n-1)}{2}$,　(3)36.　2. $\dfrac{n(n-1)}{2}-r$.　3. 0

4. (1) 原式 $=\begin{vmatrix}1000 & 427 & 327\\ 2000 & 543 & 443\\ 1000 & 721 & 621\end{vmatrix}=10^5\begin{vmatrix}1 & 1 & 327\\ 2 & 1 & 443\\ 1 & 1 & 621\end{vmatrix}=-294\times 10^5.$

(2) 原式$=\begin{vmatrix}2x+2y & y & x+y\\ 2x+2y & x+y & x\\ 2x+2y & x & y\end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix}1 & y & x+y\\ 0 & x & -y\\ 0 & x-y & -x\end{vmatrix}$

$=-2(x^2+y^2).$

(3)160,　(4)1,　(5)0,　(6)1.

5. $(x-2a)^{n-1}[x+(n-2)a]$.

6. $\because D=D'$，而 $a_{ij}=-a_{ji}$，$\therefore D'=(-1)^nD$. 故 $D=(-1)^nD$. 当 n 是奇数时，$D=(-1)^nD=-D$，从而 $2D=0$，所以 $D=0$.

7. (1) 当 $n\geqslant 3$ 时，从第 2 列起各列减去第 1 列，得

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \\ a_2-b_1 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \end{vmatrix}=0$$

当 $n=2$ 时，原式 $=(a_2-a_1)(b_2-b_1)$.

当 $n=1$ 时，原式 $=a_1-b_1$.

(2) 原式 $=(\sum_{i=1}^{n}x_i-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$

$$=(\sum_{i=1}^{n}x_i-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}=(\sum_{i=1}^{n}x_i-m)(-m)^{n-1}.$$

8. $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x \\ 2x-3 & x-7 \end{vmatrix}$

$=(x-2)(x-7)-x(2x-3)=x^2-9x+14-2x^2+3x$

$=-x^2-6x+14=-(x^2+6x+9)+23$

$=-(x+3)^2+23\leqslant 23.$

9. 由题设知行列式每一项的绝对值都等于 1，又行列式等于 0，说明带正号的项与带负号的项个数相等. 而由定义，项的符号是：当第一下标排成自然顺序后，第二下标所成排列为偶排列时带正号，为奇排列时带负员，所以奇偶排列各半.

10. 由题意：

$f(x+1)=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2+2x+1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3+3x^2+3x+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n+nx^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+1 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1}+(n+1)x^n+\cdots+1 \end{vmatrix}$$

所以，$f(x+1)-f(x)=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2x+1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 3x^2+3x+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & nx^{n-1}+\cdots+1 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n+\cdots+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & 0 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n \end{vmatrix} = (n+1)!x^n$$

11. (1)、(2)略. (3)用归纳法可得$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$(4)用归纳法可得：

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. 因为 $AB=BA, AC=CA$，所以.

$A(B+C)=AB+AC=BA+CA=(B+C)A$，

$A(BC)=(AB)C=(BA)C=B(AC)=B(CA)=(BC)A$.

13. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3(d-c+a) & b & d \\ 6(c-a)-3d & \dfrac{d}{2} & c \end{pmatrix}$.

14. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

又据 $A=A'$,$A^2=0$ 得 $A^2=AA=AA'$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 & & * \\ & a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2 & \ddots \\ * & & a_{n1}^2+a_{n2}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{pmatrix}=0.$$

所以,乘积的每一个元素都等于 0。于是得到 n^2 个等于零的式子。其中,主对角线上的 n 个等于 0 为:

$$\begin{cases} a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2=0 \\ a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2=0 \\ a_{n1}^2+a_{n2}^2+\cdots+a_{nn}^2=0 \end{cases}$$

由于元素都是实数,所以必有

$$\begin{array}{l} a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1n}=0 \\ a_{21}=a_{22}=\cdots=a_{2n}=0 \qquad \therefore A=0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}=a_{n2}=\cdots=a_{nn}=0 \end{array}$$

15. 因为

$$E^m-A^m=(E-A)(E+A+\cdots+A^{m-1})$$

而 $A^m=0$,从而

$$E^m=E=(E-A)(E+A+\cdots+A^{m-1})$$

所以 $E-A$ 可逆. 且$(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{m-1}$.

16. 由于对任意方阵 C,均有

$$CC^*=C^*C=|C|E$$

故可得

$$\begin{aligned} |A|\cdot|B|B^*A^* &= |AB|E(B^*A^*)=(AB)^*(AB)(B^*A^*) \\ &= (AB)^*A(BB^*)A^*=(AB)^*A\cdot|B|EA^* \\ &= (AB)^*A|B|A^*=|A|\cdot|B|(AB)^* \end{aligned}$$

在上式中,用 $A-xE$,$B-xE$ 分别代替 A,B,当然等式仍成立,即有

$$\begin{aligned} &|A-xE|\cdot|B-xE|(B-xE)^*(A-xE)^* \\ &=|A-xE|\cdot|B-xE|[(A-xE)(B-xE)]^* \end{aligned}$$

总存在 x_1，使当 $x > x_1$ 时有

$$|A - xE| \neq 0, |B - xE| \neq 0$$

于是当 $x > x_1$ 时，总有

$$(B - xE)^*(A - xE) = [(A - xE)(B - xE)]^* \qquad (1)$$

设左右两端第 i 行第 j 列的元素分别为 $f_{ij}(x)$ 及 $g_{ij}(x)$，上式表明

$$f_{ij}(x) = g_{ij}(x) \qquad i, j = 1, 2, \cdots n$$

它们都是 x 的多项式，且对所有 $x > x_1$ 都相等，故两者恒等. 特别，$x = 0$ 时也相等，从而由(1)式得

$$B^* A^* = (AB)^*.$$

17. (1) $A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$；

(2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$； (3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

18. 因为 A, B 都是可逆的，利用初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} A & 0 & E & 0 \\ C & B & 0 & E \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} E & 0 & A^{-1} & 0 \\ C & B & 0 & E \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} E & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & B & -CA^{-1} & E \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} E & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & E & -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}, \text{所以} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

19. 必要性：$AA^{-1} = E, |A^{-1}| = |A|^{-1}$，因 A^{-1} 与 A 的元素均为整数，所以 $|A^{-1}|$ 与 $|A|$ 均为整数. 故 $|A| = \pm 1$.

充分性：此时伴随矩阵 A^* 的元素均为整数，又 $A^{-1} = |A|^{-1}A^*$，所以当 $|A| = \pm 1$ 时，A^{-1} 的元素均为整数.

20. 由 $A \cdot A^* = |A| \cdot E$，取行列式得 $|A| \cdot |A^*| = |A|^n$.

若 $|A| \neq 0$，则 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

若 $|A| = 0$，则必有 $|A^*| = 0$，因若 $|A^*| \neq 0$，则有 $A^*(A^*)^{-1} = E$. 由此又得

$$A = AA^*(A^*)^{-1} = |A|E \cdot (A^*)^{-1} = 0$$

这与 $|A^*| \neq 0$ 是矛盾的. 故当 $|A| = 0$ 时亦有 $|A^*| = 0$ 即此时也满足 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

第 三 章

1. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.

2. 因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

3. 由已知条件，存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r, l_1, l_2$，使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + l_1\beta + l_2\gamma = 0$. 可以证明，$l_1, l_2$ 至少有一个不为零. 再分三种情形讨论：$l_1 \neq 0, l_2 = 0$；$l_1 = 0, l_2 \neq 0$；$l_1 \neq 0, l_2 \neq 0$.

4. 考虑等式 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + k\beta, k \neq 0$. 由此可将 β 表成 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha$ 的线性组合. 用反证法证明 β 不能表成 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合.

5. 由题设存在不全为零的数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_m$，使 $k\beta + k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$. 从最后一项开始，设第一个不为零的数是 k_i，证明 α_i 即为所求. 再用反证法证明只有 α_i 满足要求.

6. 设 $A = (a_{ij})_{n\times s}$，A 的行向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is})$. 设存在 $B = (b_{ij})_{r\times n}$，至少有某个 $b_{ij} \neq 0$，使 $BA = 0$. 由此推出 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$. 令

$$B = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{r\times n}$$

则 B 为所求.

7. A 有右逆的充分必要条件是 A 的行向量组线性无关. 证明方法类似本章 §1 例 16.

8. 类似 §1 例 11.

9. 作齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，再利用 §2 例 10 的结果.

10. 由 $0 = $ 秩$[(A + E)(A - E)] \geqslant$ 秩$(A + E) +$ 秩$(A - E) - 3$ 及秩

$(A+E)+$ 秩$(A-E)\geqslant$ 秩$[(A+E)+(E-A)]=3$，得秩$(A+E)+$ 秩$(A-E)=3$. 再由题设 $A\neq\pm E$ 即可证得.

11. 把 $AB-E$ 写成 $AB-E=(A-E)B+(B-E)$.

12. 设秩 $A=r$,则存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q,使

$$PAQ=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(1)$PA=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$；　　(2)$AQ=P^{-1}\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

13. 由 §2 例 9 知,方程 $AX=0$ 与$(BA)X=0$ 同解. 再证方程$(AC)X=0$ 与$(BAC)X=0$ 同解.

14. 用 A' 左乘、C' 右乘等式 $ABC=0$,再证 $A'A,CC'$ 都可逆.

15. (1)由 §1 例17(1)：秩 $XA(B-C)=$ 秩 $A(B-C)$，再证秩$XA(B-C)=0$;(2) 利用 §1 例 17(2) 的结果,类似(1) 的证明.

16. (1) 当 $\lambda=0$ 时,无解;(2) 当 $\lambda\neq 0,1$ 时,有唯一解. 当 $\lambda=1$ 时,有无穷多解. 一般解为:$x_1=1-x_3,x_2=-3+2x_3$,其中 x_3 是自由未知量.

17. 对增广矩阵 $\overline{A}$ 施行行初等变换,方程组有解的充分必要条件是

$$\begin{cases}-b_1-2b_2+b_3=0\\ b_1-b_2+b_3+b_4=0\end{cases}$$

取 $B=(1\quad 0\quad 1\quad -2)'$,则方程组有无穷多解. 此时,方程组的解为:$x_1=\frac{5}{9}-\frac{2}{9}x_3,x_2=-\frac{2}{9}-\frac{1}{9}x_3$,其中 x_3 是自由未知量. 取 $B_2=(1\quad 0\quad 0\quad 0)'$,则方程组无解.

18. 充分性:由克莱姆法则即得. 必要性:由已知条件,存在元素是整数的矩阵 X 使 $AX=E$,再两边取行列式即得证.

19. 利用线性方程组有解判定定理.

20. 充分性:由 $|A|\neq 0$,证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 等价. 必要性:把(2) 写成$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)A'$,$A=(a_{ij})$. $r=$ 秩$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}=$ 秩 $A'=$ 秩 A. 可得 $|A|\neq 0$.

第　四　章

1. (1)A 的特征根为:$1,\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

(2)A^{-1} 的特征根为：1，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(3) 利用凯莱定理，$f(A) = 6A + E = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 12 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

(4)$f(A)$ 的特征根为：7，$-2+3\sqrt{5}$，$-2-3\sqrt{5}$.

2. 由题设 $|A| = 0$，所以秩 $A^* = 0$ 或 1. 秩 $A^* = 0$ 时，结论显然成立.

秩 $A^* = 1$ 时，$P^{-1}A^*P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中至少有 $n-1$ 个为 0. 再注意到 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}$. 如果 A^* 有非零特征根，最多有一个，设为 λ_1，且 $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$，所以 $\lambda_1 = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}$.

3. (1) 仿本章 §1 例 3(4) 的证明.

(2) 由实对称阵的特征根是实数及(1) 可得(2).

(3) 由本章 §1 例 3 可得.

4. 与本章 §1 例 9 证明类似.

5. (1) 由题设得

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

a 是 A 的一个特征根，$(1,1,\cdots,1)' = X$ 是相应的特征向量.

(2)a^m 是 A^m 的特征根，设相应于 a^m 的特征向量是 X，有

$$A^m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a^m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^m \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}$$

6. A 的特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$，$a = \mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$. 用反证法证 $|A| = 0$，从而 $b = 0$，得 $f(\lambda) = \lambda^2$，故 $A^2 = 0$.

7. (1) 存在 $u(\lambda), v(\lambda)$ 使 $m(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)v(\lambda) = d(\lambda)$. 由此可证秩 $d(A)$

$\leqslant$ 秩 $g(A)$. 又由 $d(\lambda)\mid g(\lambda)$ 可得,秩 $g(A)\leqslant$ 秩 $d(A)$.

(2) 充分性:由 $g(\lambda),m(\lambda)$ 互素容易得出 $g(A)$ 可逆.

必要性:由 $g(A)$ 可逆证 $d(A)$ 可逆. 再由 $d(\lambda)\mid m(\lambda)$ 得 $m(\lambda)=d(\lambda)Q(\lambda)$. 并证明 $Q(A)=0$,从而 $\partial(d(\lambda))=0$.

8. (1) 应用 CD 与 DC 有相同特征多项式这一结论. (2) 在等式两边取迹. 注意到 $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$ 以及由 $\mathrm{Tr}(A'A)=0$ 可推出 $A=0$.

9. 利用凯莱定理

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3=f(\lambda),f(A)=(A-E)^3=0$$

令 $$\lambda^{100}=(\lambda-1)^3q(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c \tag{1}$$

$\lambda=1$ 时,有 $1=a+b+c$.

(1) 式两边对 λ 求一阶、二阶导数,再令 $\lambda=1$;得 $a=4950,b=-9800$, $c=4851$.

$$A^{100}=\begin{pmatrix}201 & -1000 & -600\\ 100 & -499 & -300\\ -100 & 500 & 301\end{pmatrix}$$

10. 令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,则 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}$,再求$(A^*)'$.

11. (1)A 的特征根是 1(三重),A^k 的特征根是 1(三重). 则 $\mathrm{Tr}A^k=3$.

(2) 反证法　若 A 与对角阵相似,则由 $P^{-1}AP=E$ 可推出 $A=E$. 矛盾.

12. 设 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=D$,$\lambda_i$ 互不相同. 由 $AB=BA$ 可推出 $D(P^{-1}BP)=(P^{-1}BP)D$;D 是对角阵,故 $P^{-1}BP$ 是对角阵.

13. 必要性显然.

充分性:若 $A=(C+Di)^{-1}B(C+Di)$. 其中 C,D 是实矩阵,由此推出$(C+Di)A=B(C+Di)$,$CA=BC$,$DA=BD$. 得$(C+yD)A=B(C+yD)$. 当 $y=i$ 时,$|C+yD|=|C+Di|\neq 0$. 所以 $|C+yD|$ 是 y 的非零实多项式,必存在实数 y_0 使 $|C+y_0D|\neq 0$. 实矩阵 $C+y_0D$ 可逆. 且$(C+y_0D)A=B(C+y_0D)$.

14. $|\lambda E-A|=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+1$.　$a+d=\mathrm{Tr}(A)$.

(1) $|\mathrm{Tr}(A)| > 2$. 则判别式 $\Delta = (a+d)^2 - 4 = (\mathrm{Tr}(A))^2 - 4 > 0$. A 有两个相异的实特征根 λ_1, λ_2. A 与对角阵 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 相似. 再由 $|A| = ad - bc = 1$ 知, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, 故 $\lambda_i \neq 0$, 令 $\lambda_1 = \lambda$, 则 $\lambda_2 = \lambda^{-1}$. 再证 $\lambda \neq 1, -1$.

(2) $|\mathrm{Tr}(A)| = 2$. $\Delta = (a+d)^2 - 4 = (\mathrm{Tr}(A))^2 - 4 = 0$. 由此得 $a + d = 2$ 或 -2. 所以 $f(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ 或 $f(\lambda) = (\lambda + 1)^2$. A 有两个相等的实特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 或 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. 由本章 §2. 例 2. A 相似于 $\begin{bmatrix} 1 & \lambda_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 或 A 相似于 $\begin{bmatrix} -1 & \lambda_0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. $\lambda_0 \neq 0$, λ_0 是实数. 再证 $\begin{bmatrix} 1 & \lambda_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似, $\begin{bmatrix} -1 & \lambda_0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似.

第 五 章

1. 略. 2. 在有理数域上初等因子为: $\lambda^2 - 2, \lambda^2 + 1$.

3. 不变因子: $d_1(\lambda) = \cdots = d_5(\lambda) = 1, d_6(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$,

$$d_7(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

4. 不变因子: $d_1(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1, d_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n$. 故 A 的若当标准形

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. (1) 若当标准形. 有理标准形分别为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 若当标准形，有理标准形分别为：

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. 注意 $f(\lambda) = x^{50} - 1$ 是 A 的零化多项式.

7. 充分性显然. 由 $h(\lambda)$ 的构作知 $h(\lambda)$ 恰含有 A 的一切互异的特征根，且 $h(\lambda)$ 无重根. 故有 $m(\lambda) = h(\lambda)$.

8. 由 $(\lambda - 2)^2$ 在 $f(\lambda)$ 和 $m(\lambda)$ 分解式中出现的次数判断：若当块 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 在若当标准形中至少有一块，还可能出现两次；而 $(\lambda - 3)^2$ 对应的若当块 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 在若当标准形中只能出现一次. 故矩阵 A 的若当标准形有两种可能. 它们是：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & & 2 & 0 & & & \\ & & 1 & 2 & & & \\ & & & & 3 & 0 & \\ & & & & 1 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 0 & \\ & & & & 1 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

9. 若可逆方阵 P 使 $P^{-1}AP = J$ 为 A 的若当标准形. 由幂零阵的一切特征根为零，可推得 $J^k = 0$ 和 $A^k = 0$. 故有 $k \leqslant n$.

10. A 与 B 有相同的行列式因子，或证有相同的不变因子.

11. 不变因子：$d_1(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1, \quad d_n(\lambda) = \lambda^n - 1$.

初等因子：$\lambda - \omega, \lambda-\omega^2, \cdots, \lambda-\omega^{n-1}, \lambda - 1$. 其中 ω 是 n 次原根. 若当标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

12. 求出 A 的最后一个不变因子 $d_4(\lambda)$，则最小多项式 $m(x) = d_4(\lambda) = \lambda^3$

$-16\lambda^2-20\lambda$.

13. (1) 因 $A^2=A$. 故 A 的特征根只能为 1 或零. (2) 秩 A 应等于 A 的一切特征根之和. 即得结论.

14. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的一切特征根，可逆矩阵 P，使

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},J_i=J(\lambda_i,n_i),\sum_{i=1}^{s}n_i=n.$$

于是

$$P^{-1}(E-A)P=\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & & & \\ & 1-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & 1-\lambda_n \end{pmatrix}$$

可见 $1-\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $E-A$ 的特征根，由 $|1-\lambda_i|<1$ 可推出 $0<|\lambda_i|<2\quad(i=1,2,\cdots,n)$. 故

$$0<\left|\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right|=|A|<2^n$$

15. 充分性　设可逆矩阵 P 使 A 化为若当标准形：

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

设初等因子 $\lambda^{k_1},\lambda^{k_2},\cdots,\lambda^{k_{n-r}}$ 对应的若当块分别为 $J_1,J_2,\cdots,J_{n-r}$，它们都是特征根为零的 $n_i(i=1,2,\cdots,n-r)$ 阶若当块，将 J 中这些 $J_i(i=1,2,\cdots,n-r)$ 的第一行和第 n_i 列(元素全为 0 的行) 划去后，所得 $r=n-(n-r)$ 阶子式非零. 但阶数大于 r 的子式全为零. 故秩 $A=$ 秩 $J=r$.

必要性　若秩 A 为 r，A 的形如 λ^k 的初等因子有 t 个，按刚才讨论有 $r=n-t$. 则有 $t=n-r$.

16. 取排列阵 $Q=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_2,e_1)$，若 J 是 A 的若当标准形，则有 $Q^{-1}JQ=QJQ=J'$. 由 J 与 J' 相似可得 A 与 A' 相似.

17. 注意 A 的若当标准形 J 的对角线上元素全为 0. 若可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=J$. 则 $A+E=P(J+E)P^{-1}$，就可推得结论.

18. 可以. 因换后的若当块的初等因子仍为$(\lambda - a)^n$.

19. 用循环证法

(1)⇒(2)　任取 A 的特征根 λ，有非零向量 α 使 $A\alpha = \lambda\alpha$. 于是 $0 = A^n\alpha = \lambda^n\alpha$，有 $\lambda = 0$.

(2)⇒(3)　A 的若当标准形为所求.

(3)⇒(4)　相似矩阵有相同的特征多项式. 求 A 的若当标准形的特征多项式.

(4)⇒(1)　用凯莱定理.

第　六　章

1. 因答案不唯一，列出参考答案.

(1)$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，　标准形：$y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$. $r = 2, s = 0$.

(2)$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

标准形：$y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_4^2$. $r = 3, s = 1$.

(3)$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$，标准形：$3y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + 8y_3^2$. $r = 3, s = 1$.

(4) 根据本例特点，不必将平方项展开，先取满秩线性替换：

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad\quad x_3 \end{cases}$$

将二次型化成 $2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_1y_2$，再配方即可.

2. 先将二次型 $f(x,y,z)=5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz+4yz$ 用正交线性替换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

其中
$$T=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$$

化成标准形 $9y_1^2+9z_1^2$. 原方程不含一次项,只需经过转轴就可得标准方程 $y_1^2-z_1^2-3=0$.

3. ① 由 $r=p+q, s=p-q$. 于是 $r+s=2p$. 故 r 与 s 有相同的奇偶性.

②$0\leqslant p,q\leqslant r$. 故 $0\leqslant |p-q|\leqslant r$ 即 $0\leqslant |s|\leqslant r$.

4. 参考 §3 例 9 得 $|A+B|\geqslant|A|$ 的过程中有

$$|P'(A+B)P|=|E+D|, P'AP=E$$

其中 P 是可逆方阵. 矩阵

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 B 的特征根,故每个 $\lambda_i\geqslant 0$. 据此有

$$|A+B|=|(P')^{-1}||E+D||P^{-1}|\geqslant|(P')^{-1}||E||P^{-1}|=|A|$$

于是 $|A+B|=|A|\Rightarrow|D+E|=|E|\Rightarrow$ 每个 $\lambda_i=0\Rightarrow|D|=0\Rightarrow|B|=0$.

5. 原式 $=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j)$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i<j}x_ix_j=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2$$

对任意非零向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,上式的值非负. 但若 $c\neq 0$. 取 $X=(c,c,\cdots,c)$ 知上式为零,故此二次型是半正定的.

6. 考虑正定阵 $A = P'P$(P 是可逆方阵),则当 B 为可逆方阵时,$B'AB = B'P'PB = (PB)'(PB)$. 故 $B'AB$ 正定.

7. 取 n 阶排列矩阵 $Q = (e_{i_1}\cdots e_{i_k}e_{i_{k+1}}\cdots e_{i_n})$. 因 A 是正定阵. 故 $Q'AQ$ 也是正定阵. 它的 k 阶顺序主子式恰好是 A 的主子式 $\left|A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ i_1 i_2 \cdots i_k \end{pmatrix}\right|$,故得结论.

8. 如有满秩实矩阵 P,使 $P'EP = -E$,即 $P'P = -E$,但若 $P = (p_{ij})$,它的主对角线元素是

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{ki} \geqslant 0$$

而 $-E$ 主对角线上元素都是 -1,矛盾.

在复数域上,取可逆满秩方阵 $P = iE$,这里 i 是虚数单位. 则 $P'EP = (iE)(iE) = -E$. 故 E 与 $-E$ 在复数域上合同.

9. 设 $X = (x_1, \cdots, x_n)'$,则

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX - 2b'X = (X - A^{-1}b)'A(X - A^{-1}b) - b'A^{-1}b$ 因 A 正定,故 $(X - A^{-1}b)'A(X - A^{-1}b) \geqslant 0$. 当且仅当 $x - A^{-1}b = 0$ 时等号才成立,当 $f(x_1, \cdots x_n)$ 在 $X = a = A^{-1}b$ 时取极小值,且极小值是 $-b'A^{-1}b$.

10. $b_{ij} = a_i a_j a_{ij} = a_i a_j a_{ji} = b_{ij}$ 知矩阵 $B = (b_{ij})$ 实对称阵. 因 A 是正定阵,故有可逆阵 P 使 $A = P'P$. 令

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

则 $B = C'AC = C'P'PC = (PC)'PC$. 故 B 是正定阵.

11. 由 A 是正定阵,有实可逆矩阵 Q_1,使 $Q'_1AQ_1 = E$. 令 $B_1 = Q'_1BQ_1$,B'_1 仍是实对称阵. 设有正交矩阵 Q_2,使

$$Q'_2B_1Q_2 = Q'_2Q'_1BQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 是 B_1 的一切特征根. 再令 $P = Q_1Q_2$ 就可使 A,B 同时为对角形矩阵. 即

$$P'AP = E,\quad P'BP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

又 $P'(\mu A - B)P = \mu E - P'BP = \begin{pmatrix} \mu - \mu_1 & & & \\ & \mu - \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu - \mu_n \end{pmatrix}$

$$|P'||\mu A - B||P| = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)\cdots(\mu - \mu_n).$$

故 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $|\mu A - B|$ 的 n 个根.

12. 由 A 是正定阵有可逆阵 Q,使 $A = Q'Q$,对实可逆阵 Q 必有上三角正线阵 B 及正交阵 T,使 $Q = TB^{-1}$(参见北大编《高等代数》P. 372. 习题 14.),于是 $T = QB$,

$$B'AB = B'Q'QB = (QB)'QB = T'T = E.$$

13. $aE - A$ 是实对称阵,有正交阵 T 使

$$T'(aE - A)T = T'aET - T'AT = \begin{pmatrix} a - \lambda_1 & & & \\ & a - \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a - \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 应为 A 的一切特征根.

由题设 $a - \lambda_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$,故 $aE - A$ 是正定阵. 对任一 n 维非零向量 X 有　$X'(aE - A)X > 0, aX'X > X'AX$. 同理有 $bX'X > X'BX$. 设 λ 是 $A + B$ 的任一特征根,α 是属于 λ 的特征向量,则$(A + B)\alpha = \lambda\alpha$.

$$\lambda\alpha'\alpha = \alpha'(A + B)\alpha = \alpha'A\alpha + \alpha'B\alpha < (a + b)\alpha'\alpha$$

因 $\alpha'\alpha \neq 0$ 故 $\lambda < a + b$.

14. 半正定阵 A 是实对称阵,故存在正交阵 Q,使

$$A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^{-1}$$

其中 $\lambda_i \geq 0(i = 1,2,\cdots,n)$. 由 $A'B = BA'$,可得

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^r & & & \\ & \lambda_2^r & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^r \end{pmatrix} Q^{-1}BQ = Q^{-1}BQ \begin{pmatrix} \lambda_1^r & & & \\ & \lambda_2^r & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^r \end{pmatrix}$$

令 $T = (t_{ij}) = Q^{-1}BQ$,则 $\lambda_i^r t_{ij} = t_{ij}\lambda_j^r \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$

当 $\lambda_i^r = \lambda_j^r$ 时,易知 $\lambda_i = \lambda_j, \lambda_i t_{ij} = \lambda_j t_{ij}$.

当 $\lambda_i^r \neq \lambda_j^r$ 时,有 $t_{ij} = 0$,仍有 $\lambda_i t_{ij} = \lambda_j t_{ij}$.

于是由 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}BQ = Q^{-1}BQ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

可得结论 $\quad AB = BA$.

15. 若 $A=P'P$,P 可逆阵,则 $B'AB=(PB)'PB$,且有秩 $B'AB=$ 秩 $PB=$ 秩 B.

16. $f(x_1,\cdots,x_n)$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right]$$

它的正惯性指数 $p = n - 1$,负惯性指数为零. 故 $p = r < n$(参见 §1 例 3).

17. 依题意,所用满秩线性替换 $X = PY$ 的矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

令 $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,分别代入 $X = PY$,即得

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

取 $\alpha = X_1, \beta = X_2, \gamma = X_3$，即为所求.

18. 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+2 & \lambda+3 & \cdots & \lambda+n+1 \\ \lambda+3 & \lambda+4 & \cdots & \lambda+n+2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda+n+1 & \lambda+n+2 & \cdots & \lambda+2n \end{pmatrix}$$

仿 §1 例 3 知，A 合同于矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故原二次型经某个满秩线性替换化成$2y_1y_2$，显然，它的秩、符号差均与λ无关.

19. 设 λ 是矩阵 $bE - A$ 的任一特征根，于是

$0 = |\lambda E - bE + A| = |A - (b-\lambda)E| = (-1)^n|(b-\lambda)E - A|$

故 $b-\lambda$ 是 A 的特征根，$b-\lambda \leqslant b$，由此 $\lambda \geqslant 0$.

20. 必要性　设正交线性替换 $X = QY$，化二次型 $f(x_1,\cdots,x_n) = X'AX$ 为规范形 $y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_n^2$，则

$$B = \begin{bmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{bmatrix} = Q'AQ, A'A = QB'Q'QBQ' = E$$

故 A 是正交阵.

充分性　A 是正交阵且为实对称阵，故 $A^{-1} = A' = A, A^2 = E$. A 的特征根必为 ± 1，必有正交阵 T 使 $T'AT = \begin{bmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{bmatrix}$，其中 p 是二次型的正惯性指数.

第　七　章

1. (1) 不是，加法不封闭；(2) 不是，加法不满足交换律；(3) 是，零向量是 lg1，向量 lg$x$ 的负向量是 lg$\frac{1}{x}$；(4) 不是，第一象限的非零向量的负向量在第三

象限;(5) 不是,$f(x) \in V, k<0$ 时,$kf(x) \overline{\in} V$;(6) 不是,无零向量,或加法不封闭.

2. 用定义逐一验证,$1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ 是 V 的一个基,$\dim V = 3$.

3. (1)V 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间,它的基就是任一基础解系,$\dim V = n-r$.

(2)$E_{ij}(i \leqslant r, j \leqslant r; i > r, j = 1,2,\cdots,n)$ 是 V 的一个基,E_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1,其余元素全为零的 n 阶方阵,这个基共有 $r^2 + (n-r)n = n^2 - (n-r)r$ 个向量,$\dim V = n^2 - (n-r)r$.

(3)$\varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0), \varepsilon_2 = (0,1,\cdots,0), \cdots, \varepsilon_n = (0,0,\cdots,1), \eta_1 = (i,0,\cdots,0), \eta_2 = (0,i,\cdots,0), \cdots, \eta_n = (0,0,\cdots,i)$ 是 V 的一个基,$\dim V = 2n$.

(4)$x-1, x^2-1, \cdots, x^n-1$ 是 V 的一个基,$\dim V = n$.

(5) 两个未知量 x,y 的 n 次齐式 $x^n, x^{n-1}y, \cdots, xy^{n-1}, y^n$ 是 V 的一个基,$\dim V = n+1$.

4. 先证 $2(\alpha+\beta) = \alpha + (\alpha+\beta) + \beta$,再证 $2(\alpha+\beta) = \alpha + (\beta+\alpha) + \beta$,由此推出 $\alpha+\beta = \beta+\alpha$.

5. (1) 可根据泰勒展开式,证明 $f_i(x)$ 与 $P[x]_n$ 的另一个基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 等价;也可用数学归纳法,设 $k_0 \cdot 1 + k_1(x-a) + \cdots + k_{n-1}(x-a)^{n-1} = 0$,取 $x = a$,得 $k_0 = 0$,代入约去 $x-a$,再由归纳假设证出 $k_1 = \cdots = k_{n-1} = 0$.

(2) 用数学归纳法,设 $k_0 \cdot 1 + k_1(x-a_1) + \cdots + k_{n-1}(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1}) = 0$,比较等式两端 x^{n-1} 的系数得 $k_{n-1} = 0$,再用归纳假设.

6. (1) 取 $\alpha = (1,1,\cdots,1)$,则 α 的一切倍数 $k\alpha(k \in P)$ 所成集合 V_1 是 P^n 的一个子空间;(2) 设 V_2 中任一非零向量 $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$(诸 $x_i \neq 0$),用反证法证明 V_2 中任一向量可由 α 线性表出(即对应分量成比例).

7. (1) 不一定. 例如 V 为直角坐标平面,V_1, V_2 为 x, y 轴,则 x 轴上非零向量与 y 轴上非零向量的和(按平行四边形法则)属于 $V_1 + V_2$,但不属于 $V_1 \cup V_2$;(2) 充分性　若 $V_1 \subseteq V_2$,则 $V_1 \cup V_2 = V_2, V_1 + V_2 = V_2$,同样可证 $V_2 \subseteq V_1$ 时结论也成立;必要性　若 $V_1 + V_2 = V_1 \cup V_2$,但 $V_1 \not\subseteq V_2$,即 $\exists\ \alpha_1 \in V_1$,但 $\alpha_1 \overline{\in} V_2$,任取 $\alpha_2 \in V_2$,则 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in V_1 + V_2$,可证 $\alpha \overline{\in} V_2$,且 $\alpha \in V_1$,即 $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 \in V_1$,故 $V_2 \subseteq V_1$.

8. (1) 是 §2 例 7 的直接推论;(2) 可对 n 用数学归纳法,先证存在 V 中线性无关的向量 α_1, α_2,且不属于 $V_1, \cdots, V_s$ 中任何一个,再假设存在 $k(<n)$ 个线

性无关的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，且其中每个都不属于 $V_1,\cdots,V_s$，令 $V_{s+k}=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$，则 V_{s-k} 是 V 的真子空间，从例 7 知，V 中有向量 α_{k+1}，使 $\alpha_{k+1}\overline{\in}V_i(i=1,2,\cdots,s+k)$，再证 α_{k+1} 合题设条件.

9. 由 $AX=0\Leftrightarrow BX=0$ 知齐次线性方程组 $A(y_1,\cdots,y_n)'=0(1)$ 与 $B(y_1,\cdots,y_n)'=0(2)$ 有相同的解空间，再证 A,B 的行向量生成的子空间 V_1,V_2 是同一齐次线性方程组的解空间. 为此，可设(1)、(2) 的基础解系为 $(c_{11},\cdots,c_{1n},\cdots,(c_{n-r1},c_{n-r2},\cdots,C_{n-rn})$ 这里 $r=$ 秩 $A=$ 秩 B，以这组基为列向量作矩阵 C，则 $AC=0$，且 $BC=0$，再作齐次线性方程组 $(y_1,\cdots,y_n)C=0(3)$，显然 V_1,V_2 的任一向量均为(3) 的解，$V_1=V_2$.

10. 将两个子空间维数公式应用于此即可.

11. (1)、(2) 可根据交集与子空间和的定义证明；(3) 利用维数定理及(2) 的结论；(4) 如三维空间 R^3 中，$R_1=L((1,0,1)),R_2=L((0,0,1)),R_3=L((1,0,0))$. 有 $R_1+R_2+R_3=L((1,0,1),(0,0,1))$，且 $R_1\cap R_2=R_2\cap R_3=R_3\cap R_1=R_1\cap R_2\cap R_3=\{0\}$，此时 $\dim(R_1+R_2+R_3)=2<\dim(R_1)+\dim(R_2)+\dim(R_3)=3$；(5) 等式并不恒成立，如(4) 中例子有 $R_3\subseteq R_1+R_2$，但 $R_3\neq(R_1\cap R_3)+(R_2\cap R_3)=\{0\}$；(6) 若 $R_1\subseteq R_3$，(5) 中等式恒成立. 但(5) 成立时，$R_1\subseteq R_3$ 不是必要的. 如 $V=\{(a,b,c,d)\mid a,b,c,d\in \mathbf{R}\}=R^4,R_1=\{(0,b,c,0)\mid b,c\in R\},R_2=\{(a,0,0,d)\mid a,d\in R\},R_3=\{(a,b,0,0)\mid a,b\in R\}$，使(5) 中等式成立，但 $R_1\not\subseteq R_3,R_2\not\subseteq R_3$.

12. 不是，$\forall\ (x,y,z)\in V$，当 $y\neq 0$ 时，其分解式并不唯一.

13. 此题即北京大学数学力学系编《高等代数》第六章习题的 22 题. 必要性显然，充分性可用数学归纳法.

14. 设 $AX=0$ 与 $(A-E)X=0$ 的解子空间为 V_1,V_2，则可将 P^n 中任一向量 α 分解为 $(\alpha-A\alpha)$ 与 $A\alpha$ 的和，再利用 $A^2=A$ 证明它们分属 V_1,V_2，即 $P^n=V_1+V_2$，最后证 $V_1\cap V_2=\{0\}$.

15. 利用同构映射的定义及性质证明.

16. 令 σ 是 V 到 V' 的一个同构映射，且 $\sigma V_1=V'_1,\sigma V_2=V'_2$，则证 $V'=V'_1+V'_2$ 即可.

17. (1)、(2) 不构成欧氏空间，其内积定义不满足条件(2)；(3) 构成欧氏空间.

18. 由内积正定性，$\forall\ \alpha\in V(\alpha\neq 0)$ 及正实数 $k\neq 1$，有 $(\alpha,k\alpha)>0$，取 $\beta=$

$k\alpha \neq \alpha$ 则 $(\alpha,\beta) > 0$，且 $\alpha \neq -\alpha$，有 $(\alpha, -\alpha) < 0$.

19. (1) 系数矩阵与增广矩阵的秩都是 3，故方程组恒有解；(2) 对应齐次方程组的基础解系为 $(-3,0,2,1)$，原方程组的一个特解为 $(b_1,b_2,b_3,0)$ 其中 $b_1 = \frac{1}{4}(3a_1 - a_2 - 5a_3)$，$b_2 = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3)$，$b_3 = \frac{1}{4}(-a_1 - a_2 + 7a_3)$，所求一般解是

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (b_1,b_2,b_3,0) + k(-3,0,2,1)$$

(3) $\because |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 14k^2 + (4b_3 - 6b_1)k + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$.

$\therefore k = -\dfrac{4b_3 - 6b_1}{28}$ 时，$|x|^2$ 最小，最小解向量为

$$X_0 = (b_1,b_2,b_3,0) + \frac{11a_1 - a_2 - 29a_3}{56}(-3,0,2,1).$$

20. 设 α,β 夹角为 θ，由题设得 $\cos\theta \leqslant 0$，又因 α,β 线性无关，所以 $\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$，于是 $\cos\theta = \dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha| \cdot |\beta|}$，由题设 $4\cos^2\theta$ 是非负整数，故 $0 \leqslant 4\cos^2\theta \leqslant 4$ 且 $4\cos^2 Q$ 只能取 $0,1,2,3,4$. 由 α,β 线性无关知 $(\alpha,\beta) \neq 0$，故 $\cos Q \neq \pm 1$. 再由 $(\alpha,\beta) \leqslant 0$ 知，$\cos\theta$ 只可能取 0，$-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 与 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 从而得证.

21. 将诸 α_i 写成坐标形式，直接计算证明 $\sum\limits_{s=1}^{n}(\alpha_p,e_s)(\alpha_q,e_s) = (\alpha_p,\alpha_q)$，也可用内积性质证明.

22. 由 $(\alpha_i,\alpha_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ i^2 & (i = j) \end{cases}$ 且 $|A|^2 = |AA'| = (n!)^2$，

$\therefore |A| = \pm n!$

23. 设 $\alpha_i = (a_{i1},\cdots,a_{in})$，$i = 1,\cdots,n-1$，作齐次线性方程组 $AX = 0(1)$，其中 $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$，设(1) 的解空间为 V；则秩 $A = n-1$，$\dim V = 1$，β_1,β_2 与诸 α_i 正交，故 $\beta_1,\beta_2 \in V$，又 $\dim V = 1$，$\therefore \beta_1,\beta_2$ 线性相关.

24. (1) 由 $(\alpha_i,\alpha_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$ 有 $G = AA'$；(2) 令 $A' = B$，则 $G = B'B = B'EB$ 又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基 $\Longleftrightarrow A$ 为实非退化方阵 $\Longleftrightarrow G$ 与 E 合同 $\Longleftrightarrow G$ 为正定阵.

25. A 是正定阵，故存在实满秩方阵 C，使 $A = C'C$，令 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基，且 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)C$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的格拉姆矩阵是 A. 易知

以 A 为格拉姆矩阵的基不唯一.

26. 令 $A=((\alpha_k,\alpha_m))_{(n-2)\times(n-2)}$，由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，其部分组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2}$ 也线性无关，从而证秩 $A=n-2$. 也可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2}$ 是 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2})$ 的一个基，其度量矩阵 $A=((\alpha_i,\alpha_j))_{(n-2)\times(n-2)}$，故 A 正定. 于是知秩 $A=n-2$. 由此再证 $n-2=p+p-s\Rightarrow 2(p+1)=n+s$.

27. 设(1) 的系数矩阵的行向量为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，令 $W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，由 §4 例 5 知(2) 的解空间为 $W^{\perp}$. 从而(1) 有解 $\Longleftrightarrow\beta$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出 $\Longleftrightarrow\beta\in W\Longleftrightarrow(\beta,W^{\perp})=0$.

28. 先证若 W 是 V 的非零真子空间，一定存在 $W_1\neq W_2$，使 $V=W\dotplus W_1=W\dotplus W_2$. 为此令 W 是 V 的非零真子空间，且 $\dim V=n,\dim W=t(<n)$，设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 为 W 的一个基，将它扩充为 V 的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_n$，则 $W_1=L(\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_n)$ 使 $V=W\dotplus W_1$，再令 $W_2=L(\alpha_1+\alpha_{t+2},\alpha_{t+2}\cdots,\alpha_n)$，可证 $V=W\dotplus W_2$，然后证 $W_1\neq W_2$(如 $\alpha_{t+1}\in W_1$，但 $\alpha_{t+1}\overline{\in}W_2$)；用上述结论即可证题目结论(反证法).

29. 令 $\varphi(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m$ 证明 φ 是 V_1 到 V_2 的同构映射；此外也可由 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$，证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 及 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 有完全相同的线性关系. 故向量组有相同的秩，于是 $\dim V_1=\dim V_2$ 故 V_1,V_2 同构.

30. 解方程组

$$\begin{cases}0.61x+0.94y=0.87\\0.94x+1.07y=0.58\end{cases}$$

得 $x=0.55,y=0.06$.

第　八　章

1. $\dim\operatorname{Im}(\sigma)=2,\dim\ker(\sigma)=2$.

2. 由 $\sigma^2+\iota=\sigma$ 得 $\iota=\sigma-\sigma^2$，从而 $\sigma(\iota-\sigma)=\iota=(\iota-\sigma)\sigma$. 所以 σ 可逆且 $\sigma^{-1}=\iota-\sigma$.

3. 注意到 $2\varepsilon_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1-\varepsilon_2$. 先证 $\sigma_2\varepsilon_1=\beta_1,\sigma_2\varepsilon_2=\beta_2$. 再证，$\forall\ \alpha\in V$ 总有 $\sigma_1\alpha=\sigma_2\alpha$ 即可.

4. $\ker(\sigma)=L(\xi_1,\xi_2)$，其中

$$\xi_1 = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0)', \qquad \xi_2 = (-1, -2, 0, 1)'$$

$$\mathrm{Im}(\sigma) = L(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2)).$$

5. σ 关于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的矩阵与 σ 关于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. $\lambda_1 = -1$(二重)，$\lambda_2 = 3$. 因 $\lambda = -1$ 时线性无关的特征向量只有 1 个，故 σ 在任意基下的矩阵不是对角形，特征向量略.

7. σ 在基(Ⅰ)之下的矩阵与 σ 在基(Ⅱ)之下的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. 转化为矩阵的相应问题考虑.

9. 设 A 是复数域上 n 维向量空间 V 的线性变换 σ 关于基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 的矩阵；V_{λ_i} 为 σ 的属于 λ_i 的特征子空间. 因 σ 的不同特征根只有 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$，又 A 可以对角化，故 $V = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$. 定义 $\sigma_i: V \longrightarrow V; \alpha_1 \longrightarrow \alpha_i, (i = 1, 2, \cdots, k)$. 这里 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \alpha_i \in V_{\lambda_i}$ 可以证明 σ_i 是 V 的线性变换. 令 σ_i 关于基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 的矩阵为 E_i，利用矩阵与线性变换的同构关系可以证明题目的三个结论.

10. 证明必要性时，对 W 的维数作数学归纳法，假定 $\dim W = k$ 时命题成立，设 $\dim W = k + 1$，即 $W = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+1})$，将 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+1}$ 扩充成 V 的基：$\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$，则

$$\sigma(\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

其中 A_1 是 $k+1$ 阶方阵. 于是 σ 的特征多项式为

$$|\lambda E - A_1||\lambda E - A_2| = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

故必有一个 $\lambda - \lambda_i$ 是 $|\lambda E - A_1|$ 的因子. 将 W 写成特征子空间 V_{λ_i} 与另一个维数是 k 的不变子空间的直和. 再利用归纳假设即可得出结论.

11. 易证 σ- 子空间至少有 2^n 个. 反之，设 L 是任一 σ- 子空间，取 L 的基 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 扩充成 V 的基 $\beta_1, \cdots, \beta_k, \beta_{k+1}, \cdots, \beta_n$. 设 σ 在此基下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ O & D\end{bmatrix}$$

B是$\sigma|_L$在L的基$\beta_1,\cdots,\beta_k$下的矩阵，只要证明B可对角化，则σ在L中有k个线性无关特征向量，所以L由$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的子集生成.

12. 必要性：找V的符合题意的基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n$. 注意到$\sigma$的秩$=k$即$\dim\sigma V=k$，故$\sigma V$有基$\sigma\varepsilon_1,\cdots,\sigma\varepsilon_k$，而$\sigma V$中任一向量$\sigma\alpha=\sum_{i=1}^{k}a_i\sigma\varepsilon_i$，故$\sigma(\alpha-\sum_{i=1}^{k}a_i\varepsilon_i)=0$，所以$\alpha-\sum_{i=1}^{k}a_i\varepsilon_i\in\mathrm{Ker}\sigma$. 设$u_1,\cdots,u_t$是$\mathrm{Ker}\,\sigma$的基，必有$t=n-k$，则

$$\alpha-\sum_{i=1}^{k}a_i\varepsilon_i=\sum_{j=1}^{t}b_ju_j,\text{即}\quad \alpha=\sum_{i=1}^{k}a_i\varepsilon_i+\sum_{j=1}^{t}b_ju_j$$

令$\varepsilon_{k+j}=u_j$，则V中任一向量可用$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n$线性表示，至于$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n$的线性无关性容易证明. 充分性略.

13. $\sigma^{-1}(0)$的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$扩充为V_1,V_2的基，得V_1的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_s$，$V_2$的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$线性无关. 扩为$V$的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t,\delta_1,\cdots,\delta_q$. 作$V$的线性变换，使满足

$$\sigma_1\alpha_i=\sigma_1\beta_j=0,\sigma_1\gamma_i=\sigma\gamma_i,\sigma_1\delta_i=\frac{1}{2}\sigma_1\delta_i$$

$$\sigma_2\alpha_i=\sigma_2\gamma_i=0,\sigma_2\beta_i=\sigma\beta_i,\sigma_2\delta_i=\frac{1}{2}\sigma\delta_i$$

则σ_1,σ_2合所求.

14. (1) 略. (2) 在σV中取基$\varepsilon_2,\varepsilon_4,\cdots,\varepsilon_{2m}$，则有$\varepsilon_1,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_{2m-1}\in V$，使$\sigma\varepsilon_i=\varepsilon_{i+1}(i=1,3,\cdots,2m-1)$. 证明$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2m}$是$V$的基，在此基下$\sigma$的矩阵为

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m\end{bmatrix}$$

其中$J_i=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,m.$

15. 必要性：当$R(\sigma^2)=R(\sigma)$时，有$\sigma^2V=\sigma V,(\sigma^2)^{-1}(0)=\sigma^{-1}(0)$，考察$\sigma^2V$的基与$\sigma V$的基的关系；$(\sigma^2)^{-1}(0)$的基与$\sigma^{-1}(0)$的基的关系.

充分性:从 σV 中取一个基 $\sigma\alpha_i, i = 1,2,\cdots,r$,考察 $\sum_{i=1}^{r} k_i\sigma^2\alpha_i = 0$,可导出 $k_i = 0(i = 1,2,\cdots,r)$,说明 $\sigma^2\alpha_i(i = 1,2,\cdots,r)$ 线性无关,从而 $\sigma^2 V$ 的一个基是 $\sigma^2\alpha_1,\cdots,\sigma^2\alpha_r$,于是 $R(\sigma^2) = R(\sigma)$.

16. 先证明:若 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 是 AB 的属于 λ 的特征子空间的一个基,则 $B\eta_i(i = 1,2,\cdots,r)$ 在 BA 的属于 λ 的特征子空间之中,再证明 $B\eta_1,\cdots,B\eta_r$ 线性无关,故 BA 的属于 λ 的特征子空间的维数 $\geqslant r$;另一方面同理可证.

17. 充分性:设 $V = L(X_1)$ 是 $V_n(p)$ 的一维子空间,则 V 是 σ 的不变子空间.因而

$$\sigma X_1 = \lambda X_1 \in V,\lambda \in P$$

设 X 是 $V_n(P)$ 中任意一个向量

(1) 若 $X \in V = L(X_1)$,即 $X = kX_1$,那么

$$\sigma X = \sigma(kX_1) = k\sigma X_1 = k\lambda X_1 = \lambda k X_1 = \lambda X.$$

(2) 若 $X \overline{\in} V = L(X_1)$,则 X 与 X_1 必线性无关.于是 $L(X + X_1)$ 也是 $V_n(P)$ 的一维子空间,从而是 σ- 子空间,有

$$\sigma(X + X_1) = l(X + X_1) = lX + lX_1, l \in P$$

又 $X \in L(X)$,有 $\sigma X = aX, a \in P$,于是

$$\sigma(X + X_1) = \sigma X + \sigma X_1 = aX + \lambda X_1$$

从而 $lX + lX_1 = aX + \lambda X_1, (l - a)X + (l - \lambda)X_1 = 0$

由 X 与 X_1 线性无关,知 $\lambda = l = a$,故 $\sigma X = aX = \lambda X$

必要性显然.

18. 略

19. $S = QDQ'$,Q 是实正交方阵,D 为实对角形阵,从而

$$\sigma(X) = Q(DQ'XQ + Q'XQD)Q'$$

令 $Q'X_{ij}Q = E_{ij}(1 \leqslant i,j \leqslant n)$,设

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

则 $\sigma(X_{ij}) = Q(DE_{ij} + E_{ij}D)Q' = (d_i + d_j)X_{ij}$,所以 A 在基 $X_{11},\cdots,X_{1n},\cdots,X_{n1}$,

$\cdots, X_{nn}$ 下的矩阵是对角形.

20. 设 σ 的负特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 的重数分别为 $2t_1, \cdots, 2t_s$；非负特征根为 $u_1, \cdots, u_r$. 那么，存在 V 的标准正交基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使 σ 在它之下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} u_1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & u_r & & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \left.\right\} 2t_1 \\ \vdots \\ \left.\right\} 2t_s \end{matrix}$$

则有 $r + 2t_1 + \cdots + 2t_s = n$，并且

$$\sigma(\alpha_1) = u_1\alpha_1 \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\sigma(\alpha_r) = u_r\alpha_r, \qquad \sigma(\alpha_{r+1}) = \lambda_1\alpha_{r+1}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\sigma(\alpha_{r+2t_1}) = \lambda_1\alpha_{r+2t_1}, \cdots\cdots$$

$$\sigma(\alpha_{r+2t_1+\cdots+2t_{s-1}+1}) = \lambda_s\alpha_{r+2t_1+\cdots+2t_{s-1}+1}, \cdots\cdots, \sigma(\alpha_n) = \lambda_s\alpha_n$$

令

$$\tau(\alpha_1) = \sqrt{u_1}\,\alpha_1, \cdots\cdots, \tau(\alpha_r) = \sqrt{u_r}\,\alpha_r, \tau(\alpha_{r+1}) = \lambda_1\alpha_{r+2},$$

$$\tau(\alpha_{r+2}) = \lambda_1\alpha_{r+1}, \cdots\cdots \tau(\alpha_{r+2t_1-1}) = \lambda_1\alpha_{r+2t_1} \quad \tau(\alpha_{r+2t_1}) = \alpha_{r+2t_1-1}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\tau(\alpha_{r+2t_1+\cdots+2t_{s-1}+1}) = \lambda_s\alpha_{r+2t_1+\cdots+2t_{s-1}} + 2$$

$$\tau(\alpha_{r+2t_1+\cdots+2t_{s-1}+2}) = \alpha_{r+2t_1+\cdots+2t_{s-1}+1}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\tau(\alpha_{r+2t_1+\cdots+2t_s-1}) = \lambda_s\alpha_{r+2t_1+\cdots+2t_s}$$

$$\tau(\alpha_{r+2t_1+\cdots+2t_s}) = \alpha_{r+2t_1+\cdots+2t_s-1}$$

则 τ 是 V 的线性变换且 $\sigma = \tau^2$.

21. 只须证 σ 是线性变换.

22. 将题设化为乘积形式，得$(\sigma + \iota)(\tau + \iota) = \iota$，从而$(\sigma + \iota)^{-1} = \tau + \iota$，故$(\tau + \iota)(\sigma + \iota) = (\sigma + \iota)(\tau + \iota)$，因而 $\sigma\tau = \tau\sigma$.

23. (1) 略.

(2) 令 $W_1 = \mathrm{Ker}\sigma, W_2 = \mathrm{Im}\tau = \tau(V)$. $\forall\ \alpha \in W_1$,则 $\sigma(\alpha) = 0$,$\forall\ \beta \in W_2$,则存在 $\gamma \in V$,使 $\beta = \tau(\gamma)$,于是$(\alpha,\beta) = (\alpha,\tau(\gamma)) = (\sigma(\alpha),\gamma) = (0,\gamma) = 0$. 所以 $\alpha \in W_2^{\perp}$. $\forall\ \xi \in W_2^{\perp}$,则 $\tau(\sigma(\xi)) \in W_2$,从而$(\xi,\tau(\sigma(\xi))) = 0$. 故$(\sigma(\xi),\sigma(\xi)) = 0$. 即 $\sigma(\xi) = 0$,$\xi \in W_1$,因而 $\mathrm{Ker}\sigma = W_1 = W_2^{\perp}$.

[General Information]
书名=高等代数方法选讲
作者=钱芳华主编
页数=363
SS号=11177926
出版日期=1990年09月第1版